

# КВАНТ

 ЯНВАРЬ 2001 № 1  
ФЕВРАЛЬ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

ПЕРВЫЕ ЗАМЕСТИТЕЛИ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
А.Н.Виленин, С.А.Гордюнин,  
Н.П.Долбилин, В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,  
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можаяев, В.В.Произолов, Н.Х.Розов,  
Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,  
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,  
Г.Л.Коткин, Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

И.К.Кикоин

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,  
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,  
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,  
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,  
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,  
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,  
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,  
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро Квантум

©2001, Президиум РАН,  
Фонд Осипьяна, «Квант»

- 2 Математика во второй половине XX века. *В.Тихомиров*  
6 Поля скрещиваются. *Л.Ашкинази*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- II Альберт Эйнштейн. *А.Васильев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 14 Задачи М1756–М1765, Ф1763–Ф1772  
16 Решения задач М1736–М1740, Ф1748–Ф1757

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 23 Задачи  
24 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»  
24 Сколько мест в автобусе и другие задачи. *Д.Калинин*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 27 Удивительная бутылка. *Е.Ромишевский*  
29 Как в землю казан закопали. *А.Стасенко*  
31 Изотопные источники энергии. *О.Егоров*

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Равновесие и устойчивость

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 35 Девятнадцать доказательств теоремы Евклида.  
*А.Эвнин*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 39 Проводящий шар в однородном поле. *А.Черноуцан*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 43 Законы сохранения в задачах на столкновения.  
*А.Овчинников, В.Плис*

## ВАРИАНТЫ

- 46 Материалы вступительных экзаменов 2000 года

- 35 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье В.Тихомирова*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Физики на монетах мира*

# Математика во второй половине XX века

**В. ТИХОМИРОВ**

**Э**ТО – ВТОРАЯ СТАТЬЯ О РАЗВИТИИ математики в XX столетии. Первая была опубликована в нашем журнале два года тому назад («Математика в первой половине XX века» – «Квант» №1 за 1999 г.).

О современности писать сложнее, чем о прошлом. То, что случилось на твоём веку, нелегко оценивать глазами потомков. К тому же свершения в математике за последние полвека воистину грандиозны, и уложить их все в одну краткую статью невозможно. Моя цель здесь рассказать, в основном, о том, чему я был непосредственным свидетелем, хотя и при таком ограничении всего, разумеется, не исчерпать.

В статье есть несколько фрагментов, набранных петитом, где фор-

мулируются результаты и даются наброски их доказательств. Там не всегда удается ограничиться материалом, проходным в школе. Но мне хотелось бы надеяться, что кому-то эти фрагменты будут понятны уже сейчас, кому-то – через недолгое время.

За эти полвека в мире произошли большие перемены. В частности, рухнул железный занавес, которым была ограждена наша страна от остального мира. Я писал в первой части своей статьи: «Во второй половине столетия математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки».

До недавнего времени было принято писать: Вейерштрасс – немецкий математик, Коши – французский математик. Сейчас все не так

просто. Как-то возник вопрос: как следует написать о национальной принадлежности известного математика Юргена Мозера. Послали ему письмо с этим вопросом. Ответ был такой: «Я родился и получил образование в Германии, имею американское гражданство, постоянно живу в Швейцарии»... Воистину для математиков весь мир стал единой страной.

Но это имело и последствия иного рода. Некоторые наши математические центры понесли большие потери – многие замечательные математики покинули нашу страну. В наибольшей мере это относится к Москве, которая на протяжении многих десятилетий была одним из основных мировых математических центров.



## Московская математика в 50-е годы

Пятидесятые годы были временем необычайного подъема московской математики. В связи с окончанием строительства Московского университета был значительно расширен прием на его механико-математический факультет. Престиж науки в тот период был высок, а наступившая оттепель породила великие надежды, которые во многом оправдались. Это все и привело к взлету математической науки у нас.

На мехмате в те годы сконцентрировались огромные научные силы. Вот кто читал основные курсы в пятидесятые годы: П.С.Александров и Б.Н.Делоне (аналитическая геометрия), А.Г.Курош и И.Р.Шафаревич (высшая алгебра), М.А.Лаврентьев и А.Я.Хинчин (математический анализ), Л.С.Понтрягин и В.В.Немыцкий (обыкновенные дифференциальные уравнения), М.В.Келдыш и А.О.Гельфонд (теория функций комплексного переменного), И.Г.Петровский, И.М.Гельфанд и С.Л.Соболев (уравнения с частными производными), А.Н.Колмогоров и Г.Е.Шиллов (функциональный анализ), П.К.Рашевский и С.П.Фиников (дифференциальная геометрия), А.Н.Колмогоров и Ю.В.Прохоров (теория вероятностей), И.М.Гельфанд и Л.А.Люстерник (вариационное исчисление)... Все это крупнейшие ученые, большинство из них – лидеры целых направлений в математике. Если читателю суждено будет стать математиком, все названные мною имена станут ему известны как имена классиков нашей науки.

В те годы на мехмате работали замечательные семинары. Среди них «топологический кружок», основанный П.С.Александровым и П.С.Урысоном (в те годы руководимый Александровым), семинар по теории вероятностей, возглавляемый А.Н.Колмогоровым и А.Я.Хинчиным, семинары И.Г.Петровского, С.Л.Соболева и А.Н.Тихонова по уравнениям с частными производными, Д.Е.Меньшова и Н.К.Бари по теории функций, А.Г.Куроша по алгебре и многие другие. Выдающую роль во всей истории математики XX века сыграл семинар И.М.Гельфанда, где обсуждался широчайший круг проблем математики и естествознания.

В истории советской математики пятидесятых годов особо выделяются два имени – Колмогоров и Гельфанд. Они оказали огромное воздействие на развитие математики у нас в стране, да и во всем мире.

Здесь разумно сказать несколько слов о различиях творческих почерков этих двух выдающихся математиков. Однажды Гельфанд произнес такую фразу: «Математика – это марафон». И вне всякого сомнения сам Израиль Моисеевич является математиком-марафонцем. Как правило, жизненный путь крупных математиков можно разделить на периоды, в течение которых данный ученый работал над некоторой проблемой или теорией. Гельфанд начинал с функционального анализа, затем был период, посвященный банаховым алгебрам, потом – теории представлений (о пятидесятых-шестидесятых годах нам предстоит еще говорить).

А Колмогоров был «спринтером». Его стиль работы уникален. Колмогоров умел на коротком отрезке времени аккумулировать мощную энергию, которая, выделяясь, приводила к взрыву огромной силы, рушившему долото неприступные бастионы. Там образовывались брешки, в которые устремлялись толпы последователей. А сам Андрей Николаевич утрачивал интерес к этой теме и начинал думать о другом.

И еще. Колмогоров был ученым-одиночкой, он почти не имел совместных работ. У Гельфанда же почти все работы совместные. Причем он работал, как правило, с лидерами своих поколений (если вы спросите кого-нибудь из окончивших, скажем, мехмат МГУ, кто учился с ним на курсе, обычно называются две-три фамилии наиболее ярких студентов; их я и называю лидерами своих поколений). Соавторами Гельфанда были лидеры поколений, годы рождения которых разнятся на полвека! Эта особенность творческой биографии Гельфанда и его творческое долголетие беспримерны.

Широта научных интересов Колмогорова и Гельфанда была совершенно фантастичной. Колмогоровым в пятидесятые годы были получены выдающиеся результаты в небесной механике (в частности, построены начала КАМ-теории), решена (при участии В.И.Арнольда) 13-я проблема Гильберта, введено понятие

энтропии динамической системы, совершившее переворот в теории динамических систем.<sup>1</sup> Скажем обо всем этом чуть подробнее.

## Устойчивость планетных систем

*Может ли планетная система сохранять устойчивость «на все времена»?* Разве это не одна из центральных проблем всей натурфилософии? Ньютон установил, что планетная система, состоящая из двух тел, устойчива: спутник вращается вокруг планеты по эллипсу. Но уже для трех тел вопрос об устойчивости – до колмогоровских работ – оставался неясным, хотя проблема эволюции орбит в задаче трех тел занимала таких величайших ученых, как Ньютон, Лаплас и Пуанкаре. Пуанкаре называл один из частных случаев этой общей задачи *основной проблемой динамики*.

Колмогоров сделал важнейший шаг к частичному разрешению этой великой проблемы. Он придумал метод, с помощью которого оказалось возможным разрешить многие задачи математики и естествознания.

Для того чтобы понять замысел колмогоровского метода, нужно знать один важный факт из классического анализа – о разложимости  $2\pi$ -периодических функций в ряд Фурье. Поставим такую задачу. Пусть нам заданы периодическая функция  $y(t)$ , разлагающаяся в ряд

Фурье  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikt}$ , и некоторое число  $\gamma$ .

Попробуем найти такую функцию  $x(t)$ ,

которая удовлетворяет уравнению  $x(t + \gamma) - x(t) = y(t)$ . Если представить функцию  $x(t)$  тригонометрическим

рядом  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}$ , то оказывается необ-

ходимым разрешить следующую бесконечную систему уравнений:  $x_k(e^{ik\gamma} - 1) = y_k$ . Если  $\gamma$  – число рациональное,  $k$  таково, что  $e^{ik\gamma} = 1$ , а  $y_k \neq 0$ , то разрешить  $k$ -е уравнение оказывается невозможным. Если же  $\gamma$  – число иррациональное, то  $e^{ik\gamma} - 1 \neq 0$  для любых  $k$ , но при некоторых  $k$  эти числа бывают очень маленькими. Тогда сама бесконечная система разрешима:  $x_k =$

<sup>1</sup> О научной деятельности А.Н.Колмогорова можно прочитать в статье А.Н.Ширяева «Андрей Николаевич Колмогоров», опубликованной в книге «Колмогоров в воспоминаниях» (М., 1993).

$= (e^{ik\gamma} - 1)^{-1} y_k$ , но в силу малости некоторых знаменателей  $(e^{ik\gamma} - 1)$  не при всяких  $\{y_k\}$  ряд Фурье для функции  $x(t)$  сойдется. Но если, с одной стороны, число  $\gamma$  не слишком хорошо приближается рациональными, а, с другой, числа  $y_k$  достаточно быстро убывают, то ряд Фурье сойдется, и наше уравнение окажется разрешимым. Однако в проблеме об эволюции орбит в задаче трех тел встречаются уравнения еще более сложные, когда надо решить уравнение  $x(t + \gamma + \xi(t)) - x(t) = y(t)$ , где  $\xi(t)$  — некоторая известная функция, являющаяся малым возмущением поворота на угол  $\gamma$ . Метод Колмогорова состоял в том, чтобы решать такое уравнение, используя и технику работы с малыми знаменателями, и известный метод Ньютона решения уравнения  $f(x) = y$ . (Для данной задачи существенные результаты были получены Арнольдом.)

Метод Колмогорова был усовершенствован Владимиром Игоревичем Арнольдом и Юргеном Мозером (которого у нас уже был повод упомянуть). Он получил название КАМ-теории (теории Колмогорова — Арнольда — Мозера). КАМ-теория дала возможность разрешить очень большое число проблем, к которым не было ранее никакого подхода.

### Проблема финальных движений

Но задача трех тел столь многогранна, что не представляется возможным ее когда-либо исчерпать. В прошедшем веке была разрешена еще одна известная проблема в задаче трех тел — *проблема финальных движений*. Она состоит в описании поведения трех тел, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения, при  $t \rightarrow -\infty$  и при  $t \rightarrow +\infty$ . Простейшие случаи, когда все расстояния между телами остаются ограниченными или когда, наоборот, все расстояния стремятся к бесконечности и в ту и в другую сторону, были известны еще Ньютону. Первые примеры «простых невозможностей» были обнаружены еще во времена Лапласа. Сама задача в явной форме была поставлена Якоби.

К тому моменту, когда А.Н.Колмогоров (в 1954 году) предложил своему студенту-третьекурснику Володе Алексеву курсовую работу на тему «Финальные движения в зада-

че трех тел», оставались логически допустимыми следующие возможности (все они реализуются и во взаимоотношениях между людьми): *обмен* (когда звезда прилетает из бесконечности и отрывает от другой звезды ее спутника); *частичный захват* (когда три звезды приближаются друг к другу из бесконечности, затем две образуют двойную звезду, а третья улетает); *полный захват* (когда двойная звезда захватывает третью, прилетевшую из бесконечности); *захват в осцилляцию* (когда тело прилетает к двойной звезде и начинает затем осциллировать, т.е. расстояние от этого тела до двойной звезды неограниченно, но не стремится к бесконечности); *двойная осцилляция* — осцилляция в прошлом и будущем; наконец, *переход из ограниченного движения в осцилляцию*.

Каждая из перечисленных выше проблем (обмена, захвата и т.п.) представляла собой задачу большой трудности. В них (как писал Владимир Михайлович Алексеев) затрагивались проблемы, «возникающие в областях, где математика и механика граничат с философией: происхождение Солнечной системы, эволюция звездных скоплений и т.п.». В настоящее время проблема финальных движений полностью решена. В 1953 году К.А.Ситников доказал возможность частичного захвата, в 1959 году он же построил пример осцилляции. Возможность остальных финальных движений была доказана В.М.Алексеевым.

Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, имеющих грандиозные последствия для всей математики, состоит в том, что во многих динамических системах (т.е. системах, эволюция которых описывается дифференциальными урав-

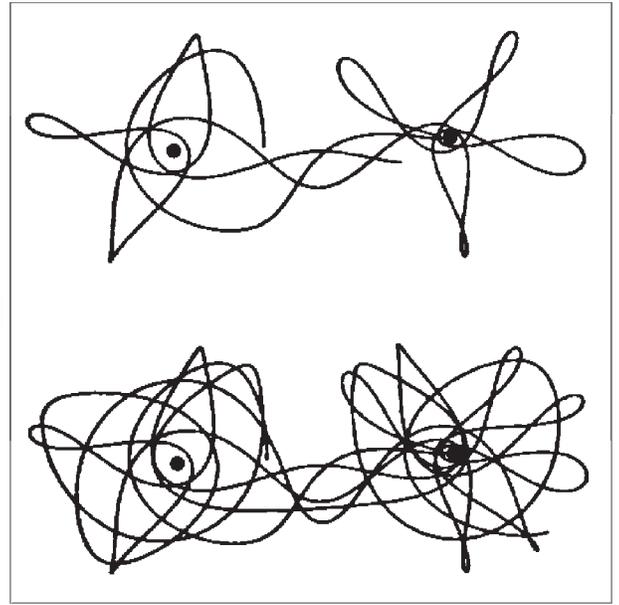


Рис.1. Типичная траектория решения задачи трех тел в небесной механике. Вверху показано начало, а внизу — дальнейшая эволюция хаотического движения малой планеты вокруг двух светил с равной массой

нениями), несмотря на их полную детерминированность (когда будущее предопределяется настоящим), могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Это явление получило название «детерминированного хаоса». Истоки идеологии детерминированного хаоса относятся еще к началу века. Тогда в трудах Ж.Адамара, Дж.Биркгофа, Э.Хопфа, А.Пуанкаре и других было обнаружено возникновение хаотических свойств в процессах, определяемых дифференциальными уравнениями. В таких динамических системах имеется сильная неустойчивость, когда малые возмущения начальных условий приводят к большим отклонениям. К числу задач, для которых характерно явление детерминированного хаоса, относится все та же задача трех тел. С одной стороны, несомненно, что ньютонова механика позволяет вычислять траектории космических кораблей, комет и планет с большой точностью и на большие времена, но, с другой стороны, при огромных длительностях времени траектории их движения становятся непредсказуемыми (см. рис.1).

### Фракталы

В восьмидесятые годы были раскрыты и другие грани непредсказуемости, связанные с динамически-

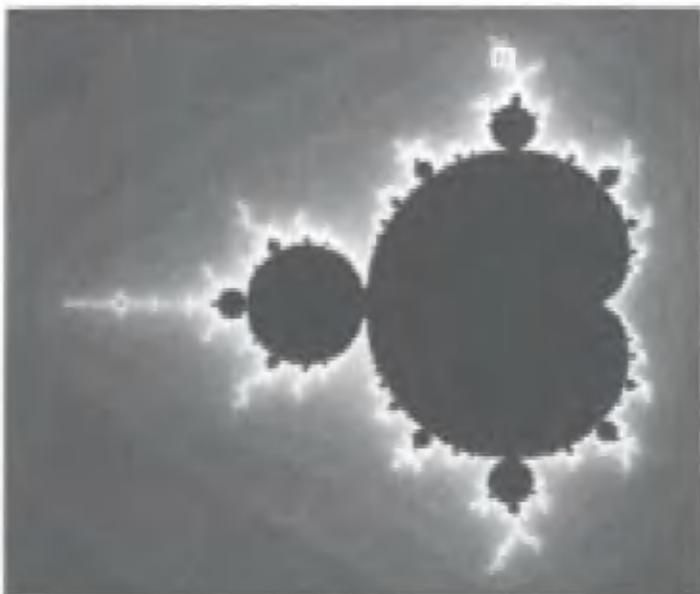


Рис.2. Множество Мандельброта

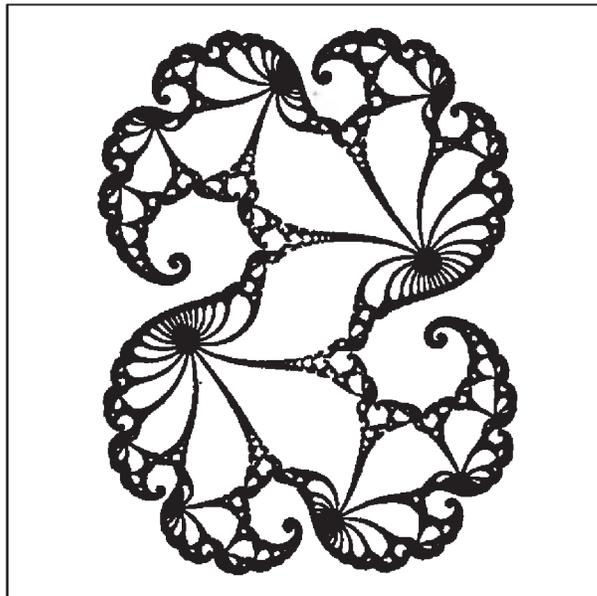


Рис.3. Множество Жюлиа

ми системами. Такие системы порождают узоры необыкновенной красоты. Честь открытия этих узоров принадлежит Бенуа Мандельброту (родившемуся в Варшаве, получившему степень доктора философии по математике в Париже, ныне профессору прикладной математики в Гарвардском университете).

На рисунке 2 изображено одно из «множеств Мандельброта». Эта необычайная картина получается из простейшего итерационного процесса, а именно такого:  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $c$  и  $z_0$  – комплексные числа. Если положить  $c = 0$  и взять  $z_0$  внутри единичного круга, то числа  $z_n$  будут стремиться к нулю. В этом случае говорится, что нуль является *аттрактором* для нашей последовательности. Если  $|z_0| > 1$ , то последовательность  $z_n$  устремляется к бесконечности (т.е. и бесконечность является аттрактором). А если  $|z_0| = 1$ , то последовательность будет вечно блуждать по единичной окружности. Таким образом, единичная окружность является здесь границей двух областей, в каждой из которых точки последовательности притягиваются к своему аттрактору. Эта окружность называется множеством Жюлиа (по имени французского математика, изучавшего подобные множества еще во втором десятилетии прошедшего века). Множество Жюлиа для значения  $c = -0,12 + 0,74i$

изображено на рисунке 3. Мандельброт же с помощью компьютера сумел нарисовать те множества  $c$ , при которых множество Жюлиа связно. Таким примером и является множество, изображенное на рисунке 2.

Множества Жюлиа и Мандельброта устроены весьма сложно, но вместе с тем они обладают рядом примечательных особенностей. В частности, множества Жюлиа «самоподобны»: фрагмент этого множества повторяет структуру всего множества в целом. Такого рода множества Мандельброт назвал *фракталами*.

### Математика и космос

К числу величайших завоеваний XX века вне всякого сомнения следует отнести рождение космической эры. Здесь, разумеется, также не обошлось без математики. Родилась новая ветвь теории экстремума – теория оптимального управления<sup>2</sup> (лидерами его были у нас Л.С.Понтрягин, а в США – Р.Беллман), а также новая ветвь теоретической механики, получившая парадоксальное наименование – «прикладная небесная механика». Наличие мощных вычислительных средств позво-

лило ставить численные эксперименты с небесными системами, подобными нашей Солнечной. Все планеты нашей системы движутся по почти круговым орбитам, лежащим почти в одной плоскости. А что было бы, если бы орбита Луны была перпендикулярна орбите Земли? Выяснилось, что Луна упала бы на Землю через четыре с половиной года! Наблюдение за поведением спутников позволило открыть ряд новых явлений природы, например «дыхание атмосферы» (на солнечной стороне линии равной плотности атмосферы вытягиваются в сторону Солнца и прижимаются к Земле на теневой стороне). Оба описанных факта – падение Луны и дыхание атмосферы – были открыты М.Л.Лидовым.

<sup>2</sup> Теории экстремума и, в частности, теории оптимального управления посвящена моя книга «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56).

# Поля скрещиваются

Л. АШКИНАЗИ

## Кушать подано!

Прибор, называемый магнетроном, был изобретен Н.Ф.Алексеевым и Д.Е.Маляровым в 1939 году. Разумеется, у них были предшественни-

ки, придумавшие нечто близкое и вместе с тем достаточно далекое, чтобы считать магнетрон новым прибором. Своих предшественников имеет и любая идея; важнее, имеет ли она своих потомков.

Каждая вещь чем-то интересна, и чем-то интересен каждый ЭВП СВЧ – электронно-вакуумный прибор сверхвысокой частоты. И если некоторые ЛБВ – лампы бегущей волны – интересны тем, что изготавливаются лишь в нескольких десятках экземпляров (ЛБВ для спутников связи), то магнетрон интересен тем, что это первый действительно массовый СВЧ-прибор. Ибо те магнетроны, которые используются в СВЧ-печах, выпускаются в Японии более

*Эта статья является органичным продолжением трех предыдущих статей того же автора: «113 лет ошибке Эдисона» («Квант» №5 за 1996 г.), «Электронный прибор» («Квант» №4 за 1997 г.) и «Длинная дорога от входа к выходу» («Квант» №1 за 1999 г.).*

*Серия статей Л.Ашкинази посвящена современной вакуумной электронике, ее физическим основаниям и историческим истокам.*

*Разумеется, каждую статью можно читать и независимо, но для более полного и глубокого восприятия и получения цельной картины мы рекомендуем заинтересованному читателю изучать эти статьи в указанной последовательности.*



чем миллионными «тиражами». Традиционная японская кухня предпочитает варить, парить и тушить, а не жарить. Румяная корочка (содержащая, между прочим, канцерогенные продукты термоллиза низкосортных жиров) – не ее цель. Так вот, СВЧ-печи как раз и делают нечто похожее на варку, парку и тушение, поскольку электромагнитная волна сверхвысокой частоты поглощается всем объемом сразу. А в печи, предназначенные для Запада (для японцев это – Восток), для «подрумянивания» специально встраивают инфракрасные лампы.

Возможно, магнетрон – это и последний массовый ЭВП СВЧ. Дело в том, что такие приборы применяются преимущественно в области высоких частот и мощностей, а там много одинаковых приборов не надо. Когда данная область частот и мощностей осваивается, то лампы успевают продвинуться дальше, а к этой области уже подбираются полупроводниковые приборы. Лампы – десант электроники, штучная работа. Полупроводники идут следом и толпой.

Пора, наконец, сказать, что такое магнетрон. Это – исторически первый представитель ЭВП СВЧ со «скрещенными полями». А именно – с магнитным и электрическим полями, перпендикулярными друг другу. Как видите, определение простое. Сложны следствия из него.

### Электрон в скрещенных полях

Заметим, прежде всего, что магнитное поле в ЭВП СВЧ нам уже встречалось. Во многих лампах бегущей волны и клистронах оно было направлено вдоль электронного пучка и удерживало электроны от разбегания в стороны. Действительно – пока скорость электрона направлена параллельно полю, на электрон со стороны поля силы не действуют. Но как только боковая скорость возникает, возникает и сила Лоренца, перпендикулярная полю и скорости. Электроны начинают двигаться по спиралям, «навиваясь» на линии магнитного поля. А что произойдет, если электрон начнет двигаться в скрещенных – магнитном и электрическом – полях, т.е. в условиях, когда  $\vec{V} \perp \vec{E}$ ?

Пусть электрон вылетает из катода с очень маленькой (практически

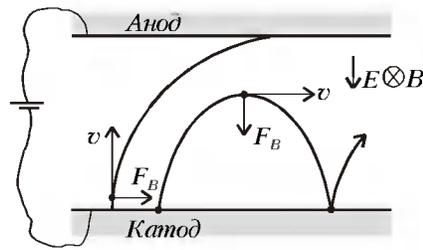


Рис.1. Движение электрона в скрещенных полях, когда электроды плоские

нулевой) скоростью и начинает двигаться к аноду (рис.1). Магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка. Пока электрон пролетел мало и скорость его  $v$  мала (сила, действующая на электрон со стороны электрического поля постоянна и равна  $eE$ , где  $e$  – заряд электрона, а  $E$  – напряженность поля), сила  $F_B$ , действующая со стороны магнитного поля, тоже мала, и электрон летит почти по прямой. По мере «падения» на анод скорость электрона растет, сила Лоренца, равная  $evB$ , увеличивается, траектория изгибается. При малой индукции магнитного поля электрон отклоняется от прямой, но анода все же достигает. При большой индукции поля траектория электрона анода не достигает. Когда скорость станет горизонтальной, электрон начнет возвращаться к катоду. Теперь он движется против электрического поля, и скорость его уменьшается. Наконец, подлетев к катоду, электрон уменьшает свою скорость до нуля. И все повторяется сначала.

В ЭВП СВЧ со скрещенными полями применяется и другое расположение электродов – коаксиальные катод и анод (рис.2). В этом случае также при малых  $B$  ток в цепи катод

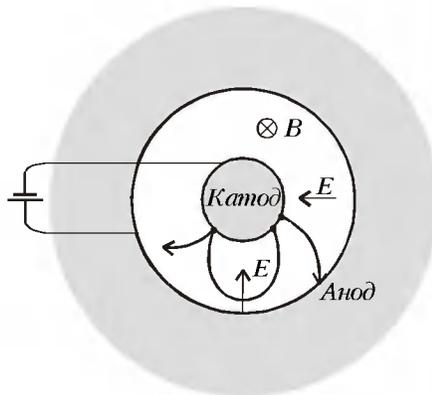


Рис.2. Движение электрона в скрещенных полях, когда электроды коаксиальные

– анод идет, при больших  $B$  – нет.

На качественном уровне с движением электрона в скрещенных полях все ясно. Пока неясно, зачем это нужно и как при этом усиливаются или генерируются электромагнитные колебания. Заметим, что работают ЭВП со скрещенными полями как раз при таких магнитных полях, при которых электроны не должны долетать до анода. Но если ток не течет, то прибор не потребляет мощности от источника питания и ему нечего преобразовывать в энергию электромагнитного поля. Так что электроны должны долетать до анода и должны отдавать энергию, возбуждая колебания электромагнитного поля. Вещи эти связанные (внимание, это ключевое место!): если электрон отдает энергию, например в точке & на

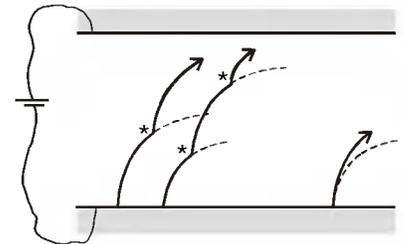


Рис.3. Отдача энергии электроном в точке & или вдоль всей траектории

рисунке 3, то он... успешно падает на анод – ведь в точке & он как бы начинает двигаться заново, с нулевой скоростью, как только что вышедший из катода. Но в ЭВП электроны не отдают энергию в какой-то одной точке, а делают это понемногу все время. Поэтому траектория состоит не из кусков, как на рисунке 3 слева, а просто имеет меньшую кривизну, как на рисунке 3 справа.

Перед тем как перейти к вопросу об усилении и генерации электромагнитных колебаний, заметим еще одну вещь. Движение электронов в системе электродов, показанных на рисунках 1 и 2, можно с пользой применить и без генерации. Видно, что если плоский катод на рисунке 1 длинный, то в пространстве между ним и анодом собирается много электронов. Такую систему можно использовать в качестве электронной пушки в любом ЭВП, в котором нужен плотный электронный поток. Так же можно использовать и коаксиальную электродную систему на рисунке 2. Катод и анод делают не совсем цилиндрическими, а слегка конусными. Электро-

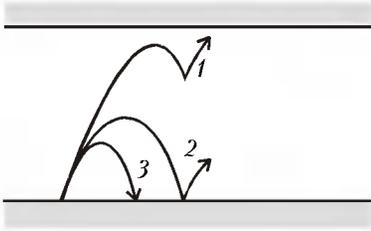


Рис.4. Движение электронов в ЭВП со скрещенными полями при взаимодействии с электромагнитной волной

ны закручиваются вокруг продольной оси и, из-за наличия у электрического поля осевой составляющей, начинают дрейфовать к выходу из магнетронной пушки. При равенстве магнитной и электрической сил электроны будут вращаться по окружностям, точнее – по спиральям. Поток, выходящий из магнетронной пушки, получается, естественно, винтовым. Это не мешает использовать его в любом ЭВП СВЧ, например в клистроне. Он может быть использован и в приборе со скрещенными полями. Такой прибор будем называть митроном.

Теперь перейдем к принципу генерации и усиления в приборах со скрещенными полями (магнетронах, митронах и т.п.). Приборов таких существует очень много, и после рассмотрения принципа их работы мы узнаем, например, почему так обширно и разнообразно семейство магнетронов.

### Есть ли разница, куда падать?

Напомним, что в лампе бегущей волны электрон падает на участке от катода до начала замедляющей системы. Падает в том же смысле, в котором падает камень, оторвавшийся от вертикальной скалы, – двигаясь по силе, уменьшая потенциальную энергию и увеличивая кинетическую. Электроны входят в замедляющую систему, набрав скорость, и уже в ней отдают кинетическую энергию электромагнитной волне.

Посмотрим, как ведут себя электроны между катодом и анодом в электронно-вакуумном приборе со скрещенными полями (рис.4). Поведение электронов описывается двумя процессами – сортировкой и фазировкой. Сортировка происходит так. Электрон 1, который вышел из катода в такой момент, что потом он должен отдавать энергию

волне, падает на анод, падает и отдает энергию, отдает и отдает... Это – хороший электрон. Плохой электрон, который вышел из катода в такой момент, что волна должна отдавать ему энергию, тут же завершает свою биографию, врезавшись в катод. Заметьте, что теперь ток на анод будет идти даже при таких больших магнитных полях, при которых раньше (в отсутствие электромагнитного поля) ток не шел.

Но процессом сортировки дело не исчерпывается. Хорошие электроны не только отделяются от плохих, но и фазированы, собираются в сгустки, как в ЛБВ. Только сгустки эти называют спицами, и понятно почему – представьте себе, как они движутся в системе, показанной на рисунке 2. Позже мы узнаем, что и от плохих электронов есть польза.

Заметим, что электронам не обязательно двигаться по сложным траекториям, показанным на рисунках 1 и 2. Если, например, на рисунке 1 электрон летит вдоль катода (горизонтально), причем поля подобраны так, что сила, действующая на него со стороны электрического поля, равна силе, действующей со стороны магнитного поля, то электрон будет продолжать лететь по прямой. Легко понять, что и круговую траекторию можно организовать таким же способом.

При взгляде на рисунок 2 бросаются в глаза два главных отличия магнетрона от ЛБВ – «круглость» и «смешанность». Первое, если выражаться точнее, это замкнутость замедляющей системы и электронных траекторий. Обе эти «замкнутости» не обязательны – есть приборы с одной из этих замкнутостей или даже вовсе без них. Но именно возможность наличия или отсутствия этих замкнутостей делает семейство магнетронов столь обширным.

Далее, «смешанность». Она тоже может быть выражена в разной степени. Например, в клистроне все отдельно – катод, входной резонатор, пролетное или «дрейфовое» пространство, выходной резонатор и коллектор. Функции всех пяти узлов вам уже известны. Правда, промежуточные резонаторы делают отчасти то, что выходной, и отчасти то, что входной. Но в ЛБВ средние три элемента всегда смешаны в

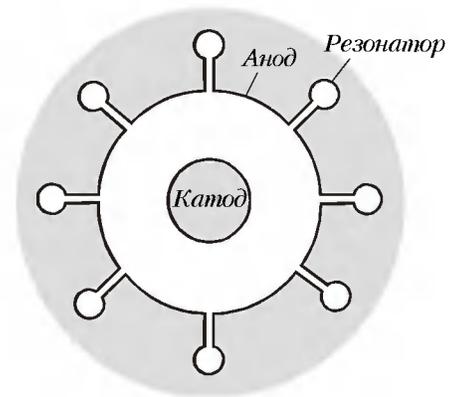


Рис.5. Магнетрон с резонаторами типа «цель-отверстие»

спирали: входная ее часть в основном модулирует пучок, выходная в основном снимает сигнал с пучка и вся она – пролетное пространство. В магнетроне (рис.5) смешано все вместе – все его сечения эквивалентны, все они содержат кусочек катода, кусочек пролетного простран-

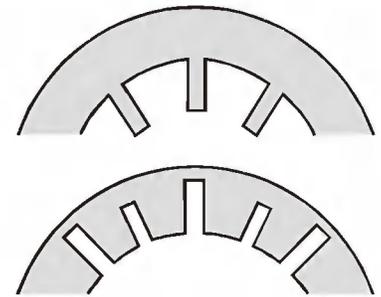


Рис.6. Замедляющие системы магнетронов: сверху – лопаточного типа, внизу – целевого типа

ства, кусочек анода и, конечно, кусочек замедляющей системы. Замедляющая система в магнетроне состоит из резонаторов, а резонаторы могут быть разными (рис.6).

В отличие от лампы бегущей волны и лампы обратной волны в магнетронах замедляющие системы часто делают состоящими из резонаторов, настроенных на две резонансные частоты. На рисунке 6 внизу показан разнорезонаторный «анодный блок» с резонаторами целевого типа. Такая конструкция называется романтично – «восходящее солнце». Одни и те же вещи можно называть по-разному. Можно: «резонаторный целевой блок», а можно: «восходящее солнце». Для того чтобы назвать красиво, надо иметь возможность хотя бы на пять минут задуматься о восходе солнца и

иметь желание думать о том, чтобы назвать красиво. Нужно то счастливое состояние души, которое создается трудной, но посильной работой и ощущением свободы выбора рода деятельности вообще и конкретной задачи и путей ее решения в частности.

Многое связано в нашей жизни с работой. Трудно сказать, более ли счастливы те, у кого это «многое» больше, чем у других. Но те, кто много работают, не соглашаются работать меньше даже тогда, когда окружающая жизнь работать мешает. О переплетении работы и жизни рассказывает единственная художественная книга, названная именем СВЧ ЭВП. Книга «Магнетрон» опубликована в 1957 году физиком Г.И.Бабатом и писательницей А.Л.Гарф. Это книга о временах, когда перед физиками стоял вопрос, почему на экранах американских радаров не видны, а на экранах английских радаров видны перископы нацистских подводных лодок, подкрадывающихся к берегам Англии. Для вас сейчас это не вопрос – просто длина волны, которую генерировали американские магнетроны, была больше диаметров перископов, а длина волны, которую генерировали английские магнетроны, была меньше. И многие другие тогдашние вопросы сейчас не вопросы... Но тогдашние вопросы сменились сегодняшними.

Если же рассуждения в этом разделе показались вам слишком сложными, вот модель попроще.

Представьте себе камень, который сначала подняли на гору, а потом уронили в пропасть. Он упадет, разогнавшись до какой-то скорости, и в процессе его полета работа, которую производит над ним гравитационное поле Земли, увеличивает его, камня, энергию (он летит все быстрее и быстрее). Теперь предположим, что камень падает по такой хитрой трубе, что через каждые сколько-то метров он сталкивается с выступом скалы, преобразуя накопленную энергию в звук удара, отскакивает и начинает лететь дальше. Если правильно подобрать расстояния между выступами, звуки ударов будут складываться, и у любопытного конструктора зазвенит в ушах.

Теперь заменим камень на электрон, гравитационное поле на элект-

рическое, а трубу с выступами на... в общем-то, именно трубу с выступами. Только не каменными, а металлическими. Пролетая мимо (вблизи, но именно мимо, в отличие от камня) них, электрон вызывает перемещение электронов в поверхностных слоях металла, т.е. ток, и электромагнитное поле. Это поле и есть то самое электромагнитное поле, а если период выступов подобран правильно, то поле усиливается, и в итоге мы получаем мощную сверхвысокочастотную электромагнитную волну.

### Маленький катод позволяет выкинуть большую схему

Смысл выражения «катод – сердце электронного прибора» в том, что параметры ЭВП во многих случаях определяются параметрами катода, а что до срока службы ЭВП – так он почти всегда определяется катодом. Но в магнетроне ситуация совершенно особая.

Часть электронов, эмитированных катодом, возвращаются на него, причем «не подползают» к нему, потратив всю энергию, а врезаются в него, имея вполне приличную скорость. Правда, эта энергия досталась электронам несправедливым путем – она «украдена» у электромагнитной волны, но катоду от этого не легче. Возврат таких электронов на катод влечет его нагрев. Иногда мощность, поступающая на катод, так велика, что его приходится охлаждать.

Но электронная бомбардировка не только нагревает катод. Приходящие на катод электроны выбивают из него вторичные электроны. Этот вид эмиссии называется вторичной электронной эмиссией. Часто вторичная электронная эмиссия оказывается достаточной, чтобы магнетрон работал только за ее счет. Конечно, избавиться от накала довольно соблазнительно, поэтому постоянно ведутся поиски материалов с большой вторичной эмиссией. Однако – как и следовало ожидать – материалы, имеющие большую вторичную эмиссию, быстро разрушаются бомбардируемыми электронами. Но это не самое интересное.

Вспомним о лампе обратной волны, синхронизованной внешним генератором. Что будет, если не по-

дать на ее вход, который находится около коллектора, синхронизирующий сигнал? Она будет не очень стабильной. Если мы хотим, чтобы такая лампа генерировала импульсный сигнал вполне определенной частоты, надо подавать напряжение питания только на время импульсов. Делает это достаточно большая схема, называемая модулятором. Заметим, что выходная лампа модулятора должна пропускать через себя всю мощность питания ЭВП. Так что места эта схема займет больше, чем тот ЭВП, которому она и будет модулировать питание. Но без модулятора не обойтись.

Теперь представим себе усилитель – клистрон или ЛБВ. Пусть нам надо, чтобы он работал в импульсном режиме. Опять нужен модулятор – ведь если анодное напряжение подавать на клистрон непрерывно, на его коллекторе будет выделяться такая мощность, что он разрушится быстрее, чем вы успеете сказать «ой!».

А вот в магнетронных усилителях без модулятора иногда можно обойтись. Действительно, представим себе прибор с холодным катодом, эмитирующим только за счет вторичной эмиссии. При наличии на лампе напряжения, но при отсутствии СВЧ-сигнала на входе ток через лампу течь не будет. Редкие электроны, выскочившие из катода, будут мирно улетать на анод и... все. Теперь подадим на вход лампы СВЧ-сигнал. Кое-какие из этих электронов будут попадать в тормозящее поле и возвращаться на катод, возвращаться и выбивать из него вторичные электроны. И если на один первичный вылетевший из катода электрон будет приходиться в среднем больше одного вторичного, то начнется лавинный процесс умножения электронов. Через лампу пойдет ток. Прибор начнет усиливать.

Это и называется безмодуляторным питанием. Но для работы в таком режиме ЭВП должен иметь катод с высокой вторичной эмиссией. Вот и опять потребовался хороший катод...

Уточним, что такое в данном случае «хороший». Конечно, катод магнетрона нужна термоэмиссия, должен иметь все те хорошие свойства, ко-

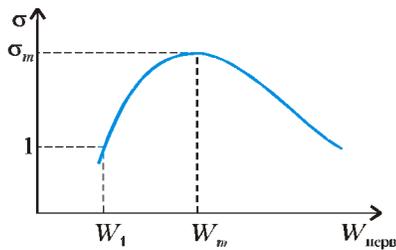


Рис.7. Зависимость коэффициента вторичной эмиссии от энергии первичных электронов

которые должен иметь термоэлектронный катод: нужную эмиссию, не слишком большую скорость испарения, достаточный срок службы, способность работать в том вакууме, который будет в приборе.

А какие свойства должен иметь катод как вторично-электронный катод? Он должен сохранять все свои свойства при наличии электронной бомбардировки, иметь достаточный срок службы в этих условиях и, наконец, иметь достаточную вторичную эмиссию. Коэффициент вторичной эмиссии всех материалов зависит от энергии первичных электронов (рис.7). Коэффициент вторичной эмиссии  $\sigma$  — это отношение количества улетающих от куска материала электронов к количеству прилетевших. Энергия  $W_1$ , при которой  $\sigma = 1$  (так называемый первый критический потенциал), энергия  $W_m$ , при которой достигается максимум  $\sigma$ , и сам максимум  $\sigma_m$  — это те три величины, которые и важны для работы ЭВП. Желательно, чтобы  $W_1$  было поменьше, а  $\sigma_m$  — побольше. У металлов  $\sigma_m$  мало, а  $W_1$  велико, но им не страшна электронная бомбардировка, а у диэлектриков велико  $\sigma_m$ , но мало  $W_1$  и низкая стойкость к электронному облучению. История катодов магнетронов — это история поисков композиционных материалов, сочетающих лучшие свойства металлов и диэлектриков. Ибо чем больше  $\sigma_m$  и  $W_m$ , тем большую мощность можно получить на выходе магнетронного усилителя, а чем меньше  $W_1$ , тем меньшую мощность надо подавать на его вход.

### Когда все упирается в технологию?

Довольно часто. Особенно, если попытаться сделать что-то новое. Конкретно — на краях освоенного диапазона параметров. При попыт-

ках сделать ЭВП рекордной мощности, КПД или частоты или с рекордным сочетанием нескольких параметров оказывается, что либо нельзя сделать такую конструкцию, как хочется, либо сделать можно, но нет материалов, при использовании которых все это сможет работать. Выходом из положения является обычно или создание новой технологии, позволяющей сегодня сделать то, чего нельзя было сделать вчера, или создание новых материалов, позволяющих прибору работать в новых условиях. Впрочем, новые материалы — это, как правило, и новые технологии.

Технологических проблем в магнетроне много. Остановимся на двух. Первая — проблема обеспечения малых размеров и малых допусков (т.е. точных размеров). Эта проблема общая у всех ЭВП СВЧ, но, согласитесь, намотать спираль диаметром 1 мм для ЛБВ проще, чем сделать анодный блок для магнетрона диаметром тоже 1 мм. Применяют пайку (для резонаторов лопаточного типа), выдавливание, электронскровую и электрохимическую обработку, резку и «сверление» электронным лучом и, наконец, все традиционные виды металлообработки. Выдавливанием удается изготовлять системы с толщиной лопаток 0,1 мм, а допуски на размеры при электронскровой обработке составляют 1 мкм. Когда же размеры анодного блока становятся меньше 1 мм, идут, например, на такое ухищрение — делают отдельные пластины из фольги толщиной 10–20 мкм и складывают анодный блок из таких пластин. Отверстия же сложной формы в фольге делают методами, заимствованными из полупроводниковой техники (например, фотолитографией) и позволяющими получать микронные размеры.

По мере уменьшения размеров и увеличения мощности увеличивается плотность мощности, выделяющейся на внутренней поверхности анодного блока, куда попадают приносящие эту мощность электроны. Поэтому эту поверхность покрывают молибденом или вольфрамом или же делают анодный блок из хитрой

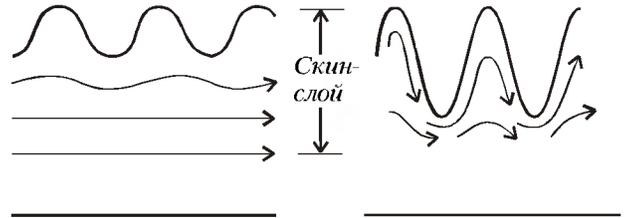


Рис.8. Скин-эффект на шероховатой поверхности

заготовки — молибденового прутка, залитого медью.

Конечно, проблема обеспечения малых размеров и допусков встречается и в других областях техники. Но вот вам второй пример — пример проблемы, пожалуй, совсем специфической. Насколько гладкой должна быть поверхность деталей? Коэффициент трения значения не имеет, «блеск» тоже, так какая же разница, гладко или не очень? Но разница есть.

Как известно, в области высоких частот ток концентрируется у поверхности детали (скин-эффект). Если шероховатость меньше толщины, в которой сосредоточен ток, то шероховатость мешает работе мало (см. рис.8, слева). Если шероховатость больше (см. рис.8, справа), то путь электронов увеличивается. Следовательно, увеличиваются сопротивление и потери мощности. Заметим, что важно, как именно «устроена» шероховатость. Если деталь шлифовалась в одном направлении и так, что токи протекают вдоль «оврагов», то увеличения сопротивления не будет. Если же ток «взбирается и ныряет», то потери мощности неизбежны.

Отсюда мораль — подстилая соломку там, где вам или вашим электронам предстоит упасть, думайте, как ее класть.

# Альберт Эйнштейн

А. ВАСИЛЬЕВ

**А**ЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН РОДИЛСЯ в Германии в 1879 году, с 1893 года жил в Швейцарии, с 1914 года – в Германии, а в 1933 году эмигрировал в США. Вклад Эйнштейна в формирование современной физики трудно переоценить: он построил квантовую теорию света и предсказал индуцированное излучение света, на основе которого были созданы современные лазеры; разработал молекулярно-статистическую теорию броуновского движения и создал квантовую статистику для частиц с целым спином (статистика Бозе–Эйнштейна); создал специальную и общую теории относительности; работал над проблемами космологии и единой теории поля. В трудах Эйнштейна поставлен ряд нерешенных до сих пор фундаментальных проблем, поиск решения которых ведется на переднем крае науки.

Эйнштейн получил образование на педагогическом факультете Политехникума в Цюрихе, который закончил в 1900 году. После этого он около двух лет был практически безработным, а затем получил место в Бернском Патентном бюро, куда был принят на должность технического эксперта. Там он служил до 1909 года, оценив позднее этот период своей жизни в следующих словах: «Составление патентных формул было для меня благословением. Оно заставляло много думать о физике и давало для этого повод». В научном творчестве Эйнштейна бернский период занимает исключительное место: здесь он создал теорию броуновского движения, теорию фотонов и специальную теорию относительности. Во многом ему помогло изучение техники, причем именно в таком ключе, как это имело место в Патентном бюро: знакомство с непрерывным потоком новых, подчас остроумных, технологических рецептов; перенос конструкций и схем из од-



ной области техники в другую; неожиданные мобилизации старых приемов для решения новых задач.

В 1905 году Эйнштейн закончил серию работ, посвященных классической теории молекулярного движения. Он объяснил природу наблюдаемого в микроскоп хаотического движения малых тел, взвешенных в жидкости – так называемого броуновского движения, – исходя из концепции беспорядочно движущихся и сталкивающихся молекул. Эйнштейн учитывал неизбежные флуктуации (т.е. отклонения от среднего значения) в беспорядочных ударах, которые наносят телу молекулы жидкости. Избыток столкновений, передающих импульс в одном из направлений, по сравнению с числом столкновений, передающих импульс в другом направлении, вызывает сдвиг пылинки, который можно наблюдать в микроскоп. Хотя подобное предположение высказывалось еще до Эйнштейна, отсутствовала математическая основа для этого утверждения и отсутствовали его экспериментальные доказательства. Эйнштейн с помощью статистичес-

ких методов, развитых Больцманом для определения средних значений в тепловых процессах, показал, что между скоростью движения взвешенных частиц, их размерами и коэффициентом вязкости существует совершенно определенная взаимосвязь, которая может быть проверена экспериментально. Эйнштейновский «закон броуновского движения» был подтвержден в 1908 году опытами французского физика Перрена.

Если теория броуновского движения завершала цикл работ в области молекулярной физики и носила строгий характер классического исследования, то работы по теории света с самого начала были революционными. В своем учении о свете Эйнштейн основывался на выдвинутой в 1900 году Максом Планком гипотезе, что испускание и поглощение энергии при тепловом излучении происходит не непрерывно, а в виде маленьких, далее неделимых порций – квантов. В 1905 году Эйнштейн постулировал, что свет не только излучается и поглощается порциями, но и состоит из дискретных квантов света, представляющих собой частицы, движущиеся в пустоте со скоростью  $c = 300000$  км/с. Впоследствии эти частицы получили название фотонов. Новая корпускулярная теория света не противоречила его волновой природе. Хотя свет и представляет собой волну, непрерывно распространяющуюся в пространстве, световая энергия в определенных явлениях проявляет себя в настолько уплотненной форме, что может рассматриваться как частица. Свет различного цвета состоит из световых квантов различной энергии: фиолетовый свет (колебания с большей частотой) состоит из более крупных неделимых порций энергии, чем красный свет (колебания с меньшей частотой). Энергия фотонов пропорциональна частоте  $\nu$  и равна  $h\nu$ , где  $h$  – постоянная Планка, или «квант действия». Позднее,

в 1916 году, Эйнштейн ввел понятие импульса фотона  $h\nu/c$ .

Учение Эйнштейна о световых квантах дало простейшее объяснение фотоэлектрическому эффекту, известному со времен Герца и Столетова. Фотоэффект состоит в возникновении электрического тока при облучении светом поверхности металлов. Эйнштейн предложил следующее объяснение этому явлению: световые кванты, попадая на поверхность металла, отдают свою энергию электронам, которые вырываются из металла и создают электрический ток. Чтобы вырвать электрон из металла, нужна определенная энергия. Если фотон такой энергией обладает, он сможет выбить электрон; при этом энергия вылетевших электронов зависит не от интенсивности света, а исключительно от его длины волны. Эйнштейн получил формулу для максимальной энергии вылетевших электронов:  $E = h\nu - A$ , где  $A$  – работа выхода, т.е. энергия, необходимая для того, чтобы покинуть металл, преодолев притяжение со стороны оставшихся атомов. Правильность данного Эйнштейном толкования фотоэффекта десятилетие спустя была подтверждена экспериментальными исследованиями американского физика Милликена. В настоящее время квантовая теория света принадлежит к надежно установленным истинам физики, а за открытие законов фотоэффекта Альберту Эйнштейну в 1921 году была присуждена Нобелевская премия.

Каждая из перечисленных выше работ уже поставила бы Эйнштейна в ряд знаменитых физиков, однако его наивысшим достижением по праву считается создание общей и специальной теорий относительности. Публикацию своих исследований по теории относительности он начал со статьи «К электродинамике движущихся тел», напечатанной в 1905 году в «Анналах физики». В том же году вышло в свет дополнение к этой статье под заголовком «Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?». Первоначальный вариант теории, носящей название специальной теории относительности, был разработан для систем, движущихся прямолинейно и равномерно. К построению этой теории Эйнштейн привел парадокс, возникающий при попытках распространить идеи классической физики (правило сло-

жения скоростей и принцип относительности) на новую область физики – электродинамику. Эйнштейн говорил, что еще с юных лет его занимал вопрос о том, что бы произошло, если бы можно было со скоростью света мчаться вслед за световой волной. Тогда наблюдатель должен был бы воспринимать луч света как покоящееся, перемещающееся в пространстве электромагнитное поле. Это, однако, противоречит теории Максвелла, согласно которой свет всегда представляет собой движущиеся электромагнитные волны. К тому же, оптические процессы в такой системе отсчета должны резко измениться: если для наблюдателя свет имеет нулевую скорость, то, например, вспышка фонаря не осветит экран, находящийся на некотором расстоянии. Такое изменение оптических процессов позволило бы наблюдателю отличить движущуюся систему от неподвижной только по процессам внутри системы, что противоречит интуитивному убеждению в невозможности зарегистрировать равномерное и прямолинейное движение при помощи внутренних эффектов в движущейся системе. Таким образом, электродинамика разрушила связь двух очевидных положений классической физики – принципа сложения скоростей и принципа относительности. Эти два положения применительно к электродинамике оказались несовместимыми, что потребовало отказа от одного из них.

Решающим экспериментом, который помог решить этот вопрос, оказался знаменитый опыт Майкельсона, предназначенный для обнаружения «светового эфира». Теория эфира господствовала в науке на протяжении всего XIX века. Считалось, что эфир пронизывает все тела, не принимая участия в их движении. Неподвижный мировой эфир является воплощением «абсолютного пространства». В опыте Майкельсона измерялось время прохождения света по двум трубкам, одна из которых располагалась вдоль движения Земли, а другая – в поперечном положении. Движение Земли в мировом эфире должно было сказаться в увеличении скорости света при прохождении по продольной трубке навстречу движению Земли и в ее уменьшении при движении в обратном направлении. При этом считалось, что

свет пройдет туда и обратно в продольной трубке за большее время, чем в поперечной. Опыт Майкельсона дал, однако, отрицательный результат: скорость света оказалась независимой от движения Земли «в эфире». Удовлетворительного объяснения опыта Майкельсона в рамках идеи мирового эфира так и не было дано, пока в 1905 году Эйнштейн не высказал утверждение, что свет распространяется с одной и той же скоростью относительно всех тел, движущихся с постоянной скоростью одно относительно другого. Это составило основную посылку специальной теории относительности: скорость света – одна и та же во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга без ускорения. Теория Эйнштейна, отказавшись от классического правила сложения скоростей, смогла подчинить принципу относительности все процессы, происходящие в равномерно и прямолинейно движущихся системах. Все эти процессы (как механические, так и оптические) не изменяются под влиянием движения систем – это второе положение специальной теории относительности.

Созданием теории относительности Эйнштейн изгнал мировой эфир, как носителя световых волн, из физической картины мира, в результате учение о свете было освобождено от механических компонентов. На место светового эфира Эйнштейн поставил электромагнитное поле как самостоятельную физическую реальность. При этом соотношения старой, классической механики получались из теории относительности как предельный случай, когда скорость света можно считать бесконечно большой по сравнению со скоростями медленно движущихся тел.

При создании теории относительности важным отправным пунктом для Эйнштейна был анализ понятия одновременности. Исходя из конечности скорости света как максимальной скорости передачи сигналов, Эйнштейн пришел к выводу, что говорить об абсолютной одновременности далеко отстоящих друг от друга в пространстве событий не имеет смысла. Поэтому понятие «абсолютной одновременности» не существует. Внесение относительности в понятие одновременности неотвратимо влекло за собой и внесение относительности в понятие времени.

Если не может быть абсолютной одновременности, то не существует также абсолютного, одинакового для всех систем отсчета времени. А значит, не существует «абсолютного движения»: движение тела или системы отсчета можно лишь сравнивать с движением другого тела или системы отсчета. Таким образом, каждое событие нужно рассматривать в рамках единого пространственно-временного представления о мире.

Законченную математическую форму специальная теория относительности приобрела благодаря усилиям Германа Минковского, бывшего учителя Эйнштейна, профессора математики в Геттингене. Минковский представил «событие», т.е. пребывание частицы в данный момент в данном месте, в виде точки в 4-мерном пространстве (3 пространственные и 1 временная координаты). Движение изображается последовательностью таких «мировых точек», а совокупность всех «событий» образует 4-мерный континуум пространства-времени, названный «миром». «Мир Минковского» стал неотъемлемой частью теории относительности.

Теория относительности сразу приобрела большую известность, появились ее сторонники и противники, она вызвала оживленную дискуссию не только в научной среде, но и в средствах массовой информации, так как ставила познание мира на совершенно новый, качественно отличный от предыдущих уровень. Научная слава Эйнштейна начала быстро распространяться по всему миру. По предложению Планка и Нернста в 1913 году Эйнштейн был избран действительным членом Берлинской Академии наук и вскоре переехал из Цюриха в Берлин, где развил активную научную деятельность.

В 1916 году в «Анналах физики» появилась работа Эйнштейна «Основы общей теории относительности». Общая теория относительности, в отличие от специальной, которая разработана для систем, движущихся равномерно и прямолинейно, относится к произвольно движущимся системам. Ее уравнения справедливы и для систем отсчета, движущихся с ускорением, и для вращающихся систем. По своему содержанию, однако, общая теория относительности главным образом пред-

ставляет собой учение о тяготении, о гравитационных полях. Отправным пунктом для создания теории явился выдвинутый Эйнштейном принцип эквивалентности сил инерции, возникающих в ускоренно движущихся системах, и сил тяготения: оба вида этих сил пропорциональны массам тел, поэтому внутренние эффекты, вызванные ускорением, можно приписать тяготению. Эйнштейн предположил далее, что за счет тяготения могут быть объяснены не только динамические, но и оптические явления. Для этого он допустил, что свет обладает гравитационной массой, тем самым ограничив специальную теорию относительности (принцип постоянства скорости света) областями, где гравитационными силами можно пренебречь. При этом удалось распространить принцип относительности на все движущиеся системы.

Для доказательства относительности ускоренных движений Эйнштейн отождествил тяготение с искривлением пространства-времени. Он показал, что пространство не является однородным, а по своей геометрической структуре зависит от распределения масс, от вещества и поля. Всеобщая справедливость геометрии Евклида уже не могла сохраниться, она оказалась предельным случаем при слабых взаимодействиях масс. В общем же пространстве царит неевклидова геометрия, теорию которой разработал Риман. В римановой геометрии, которая благодаря Эйнштейну приобрела физический смысл, говорят об «искривленном» пространстве, где нет прямых линий, а есть лишь линии кратчайшего расстояния между двумя точками (как на шаре). «Кривизна» пространства определяет геометрическую форму траекторий движения тел в поле тяготения.

Для экспериментальной проверки выводов из общей теории относительности Эйнштейн указал три «эффекта». Первый – смещение перигелия Меркурия (т.е. ближайшей к Солнцу точки его эллиптической орбиты). В теории Эйнштейна это явление объяснялось как «возмущение» структуры пространства воздействием массы Солнца. Точное совпадение наблюдаемого смещения с величиной, вычисленной по теории, послужило сильной поддержкой для учения Эйнштейна.

Вторым эффектом является отклонение (искривление) световых лучей звезд вблизи Солнца, благодаря наличию у света гравитационной массы. Отклонение луча можно заметить, сфотографировав звездное небо: если луч звезды пройдет вблизи Солнца, он отклонится, и на фотографии изображение звезды окажется смещенным по сравнению с фотографией, сделанной в отсутствие Солнца в наблюдаемой части неба. Этот эффект можно было заметить только во время солнечного затмения, так как когда Солнце на небе, звезды нельзя ни увидеть, ни сфотографировать. Нужно было выбрать такое затмение, когда Солнце находится на пути лучей ярких звезд. Такое наблюдение было осуществлено английской астрономической экспедицией в Гвинею и Бразилию в 1919 году. При сопоставлении фотографий, полученных во время затмения, с фотографией, сделанной ночью (т.е. в отсутствие Солнца на пути лучей звезд), было зарегистрировано смещение, предсказанное теорией Эйнштейна.

Третьим эффектом для проверки теории тяготения Эйнштейна является «релятивистское красное смещение», т.е. смещение спектральных линий света, приходящего к нам от гигантских звезд, по сравнению со светом, который при помощи молекул того же вида создается на Земле. Этот вывод теории Эйнштейна подтвердился при исследовании излучения спутника Сириуса.

После завершения работы над общей теорией относительности Эйнштейн занялся проблемой создания единой теории поля, сводящей воедино свойства гравитационного и электромагнитного полей. Этой проблемой он занимался вплоть до своей кончины в 1955 году, однако она осталась неразрешенной.

В истории человечества Альберт Эйнштейн остался как глубочайший физик-мыслитель, великий преобразователь естествознания, создавший новую картину мироздания.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №1 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1756» или «Ф1763». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1761 – М1763 предлагались на ХLI Международной математической олимпиаде.

Задачи Ф1764 – Ф1766 и Ф1768 – Ф1771 предлагались на заочном туре Соросовской олимпиады по физике.

## Задачи М1756—М1765, Ф1763 — Ф1772

**М1756.** Даны несколько различных натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них можно выбрать два так, чтобы одно делилось на другое. Докажите, что все числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одинакового цвета одно делилось на другое.

*Е. Черепанов*

**М1757\*.** Выпуклый многоугольник можно разрезать на 20 параллелограммов. Докажите, что этот многоугольник можно разрезать на 15 параллелограммов.

*В.Произволов*

**М1758.** Всякий депутат имеет свой (абсолютный) рейтинг. В начальный момент после избрания каждый депутат вошел в одну из фракций, в которой он может подсчитать свой относительный рейтинг. Возможен переход депутата из одной фракции в другую, если его относительный рейтинг при этом увеличивается. Пусть в каждый момент времени может происходить лишь один такой переход. Докажите, что спустя конечное время все рейтинговые переходы прекратятся.

*В.Ильичев*

**М1759.** Имеется остроугольный треугольник с меньшей стороной  $s$  и противолежащим ей углом  $\gamma$ . Известно, что треугольник можно раскрасить в два цвета так, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет не больше  $s$ . Докажите, что  $\gamma \geq 36^\circ$ .

*А.Эвнин*

**М1760.** Таблицу размером  $n \times n$  клеток назовем удивительной, если она обладает следующим свойством: всякие  $n$  чисел таблицы такие, что в каждом столбце таблицы и в каждой строке таблицы присутствует ровно одно из них, дают одну и ту же сумму. Докажите, что каждая удивительная таблица может быть представлена в виде суммы двух таблиц, у одной из которых в каждом столбце все числа равны, а у другой – в каждой строке все числа равны.

$$\text{Например, } \begin{pmatrix} 3, & 4, & 1 \\ 6, & 7, & 4 \\ 5, & 6, & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 3, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \\ 2, & 3, & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 4, & 4, & 4 \\ 3, & 3, & 3 \end{pmatrix}.$$

*В.Произволов*

**М1761.** У фокусника 100 карточек, занумерованных числами от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика – красный, белый и синий – так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка.

Один из зрителей выбирает два из трех ящиков, вынимает из них по одной карточке и объявляет сумму номеров вынутых карточек. Зная эту сумму, фокусник определяет тот ящик, из которого карточки не вынимались.

Сколькими различными способами можно разложить карточки по ящикам так, чтобы этот фокус всегда удавался?

(Способы, при которых хотя бы одна карточка попадает в разные ящики, считаются различными.)

*(Венгрия)*

**М1762.** Существует ли натуральное число  $n$  такое, что  $n$  имеет ровно 2000 различных простых делителей и  $2^n + 1$  делится на  $n$ ?

*В.Сеидеров*

*ПОПРАВКА.* В условии задачи М1754 (см. «Квант» №6 за 2000 г.) допущена опечатка. В 5-й строке текста задачи слово «черных» следует заменить словом «четных».

**M1763\***. Пусть  $AH_1, BH_2, CH_3$  – высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается сторон  $BC, CA, AB$  в точках  $T_1, T_2, T_3$  соответственно. Прямые  $l_1, l_2, l_3$  являются образами прямых  $H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2$  при симметрии относительно прямых  $T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2$  соответственно. Докажите, что прямые  $l_1, l_2, l_3$  образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

*Т.Емельянова*

**M1764.** Пусть функция  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$  удовлетворяет следующим условиям:  $f(0) = 0, f(1) > 0, f$  монотонно возрастает на  $[0; 1]$  и для любых  $x_1, x_2 \in [0; 1]$ , для которых  $x_1 + x_2 \in [0; 1]$ , выполняется неравенство

$$f(x_1) + f(x_2) \geq f(x_1 + x_2).$$

Докажите, что тогда последовательность чисел

$$s_n = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right), n = 1, 2, 3, \dots,$$

не ограничена.

*В.Попов*

**M1765.** Длина ребра правильного тетраэдра равна 1.

а) На ребрах тетраэдра отмечены 5 точек.

б) На поверхности тетраэдра отмечены 9 точек.

в\*) В тетраэдре отмечены 9 точек.

Докажите, что в каждом случае найдутся две отмеченные точки, расстояние между которыми не превосходит 0,5.

*В.Произволов*

**Ф1763.** При компьютерном моделировании создан мир, в котором скорость звука  $c_1 = 3$  м/с, а скорость света  $c_2 = 8$  м/с. Маленький автомобиль едет со скоростью  $v_0 = 5$  м/с вдоль прямой, наблюдатель находится на расстоянии  $L = 20$  м от этой прямой. В каком месте он видит автомобиль в тот момент, когда звук мотора слышен из ближайшей к наблюдателю точки прямой? (Считайте, что наблюдатель способен верно определить направление на источник приходящего звука.)

*З.Рафаилов*

**Ф1764.** Найдите ускорение тележки, на которой находятся два груза (рис.1). Стол гладкий, коэффициент трения между тележкой и грузами  $\mu$ .

*Р.Александров*

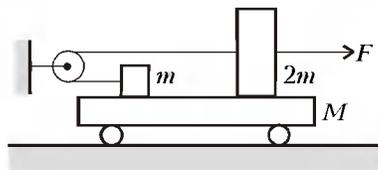


Рис.1

пара) зафиксирована картинка, на которой три отрезка прямых выходят из одной точки, отрезки составляют между собой углы  $90^\circ, 120^\circ$  и  $150^\circ$ . Картинка соответствует акту упругого столкновения протона с одним из неподвижных ядер. Установите по фотографии, что это может быть за ядро.

*С.Варламов*

**Ф1766.** Из четырех одинаковых гладких легких стержней длиной  $L$  каждый, скрепленных концами шарнирно, сделан ромб (рис.2). Один из шарниров (верхний) за-

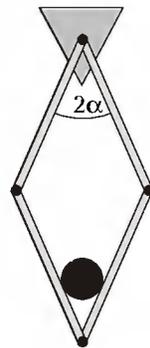


Рис.2

реплен, однородный цилиндр, помещенный внутрь ромба, находится в равновесии, верхние два стержня составляют при этом угол  $2\alpha$ . Найдите по этим данным диаметр цилиндра.

*А.Зильберман*

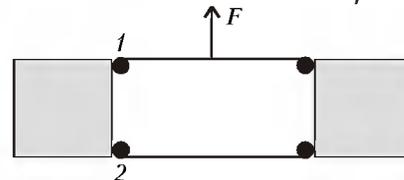


Рис.3

**Ф1767.** Два одинаковых кубика с помощью шарниров соединены двумя невесомыми и абсолютно твердыми стержнями (рис.3). К середине одного из стержней перпендикулярно ему приложена сила  $\vec{F}$ . С какими силами действуют стержни на кубик в местах прикрепления шарниров 1 и 2? Тот же вопрос для случая, когда стержни имеют такую же массу, как и кубики.

*С.Варламов*

**Ф1768.** Длинный стержень с площадью поперечного сечения  $S = 1$  мм<sup>2</sup> сделан из материала с модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>. На один из торцов начинает действовать вдоль стержня сила  $F = 1$  Н, равномерно распределенная по площади торца. Найдите смещение этого торца за время  $t = 0,1$  с (считайте, что упругая волна за это время не достигла другого конца стержня). Скорость звука в стержне  $v_{зв} = 5000$  м/с.

*А.Стержнев*

**Ф1769.** В сосуде находится воздух и некоторое количество воды при температуре  $+100^\circ\text{C}$ . Объем сосуда медленно увеличивают при неизменной температуре и измеряют давление внутри с точностью примерно 0,5%. Результаты измерений приведены в таблице:

объем, см <sup>3</sup>	20	25	30	35	40	45
давление, кПа	140	132	126,5	108,5	95	84,5

Какое количество воды сконденсируется, если, не изменяя окончательного объема сосуда, понизить температуру до  $+20^\circ\text{C}$ ?

*А.Паров*

**Ф1770.** Собрана схема, состоящая из идеальной батареи напряжением 3,3 В, двух одинаковых амперметров, двух одинаковых вольтметров и «черного ящика» с четырьмя выводами (рис.4). Показания амперметров 10 мА и 12 мА, показания вольтметров 3,6 В и 3 В. Нарисуйте возможную схему, находящуюся внутри «черного ящика» (попробуйте придумать попроще!).

*Р.Простов*

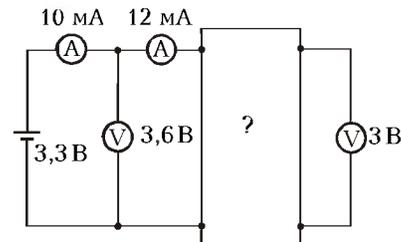


Рис.4

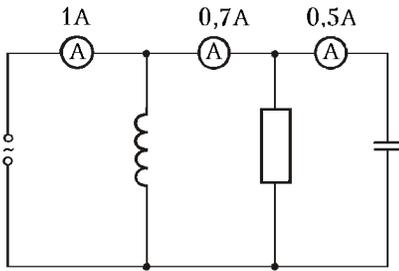


Рис.5

**Ф1771.** К источнику переменного напряжения подключены катушка, резистор и конденсатор, в цепь включены три амперметра переменного тока, показания которых 1 А, 0,7 А и 0,5 А (рис.5). Как изменятся показания

приборов после отключения резистора? Элементы цепи считать идеальными.

*Р. Старов*

**Ф1772.** Точечный источник света освещает экран. Вплотную к источнику подносят прозрачную полусферу из стекла с показателем преломления  $n = 1,6$ , плоская часть которой параллельна плоскости экрана, при этом источник «падает» в центр круга. Во сколько раз нужно изменить излучаемую мощность источника, чтобы освещенность в центре экрана осталась такой же, как и без полусферы?

*А. Светлов*

**Решения задач М1736—М1740, Ф1748—Ф1757**

**М1736.** Какое наибольшее число коней можно расставить на доске  $5 \times 5$  так, чтобы каждый из них бил ровно двух других?

На рисунке 1 приведено расположение 16 коней, удовлетворяющее условию задачи. Покажем, что большее число

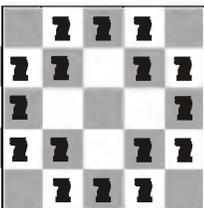


Рис.1

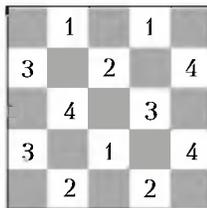


Рис.2

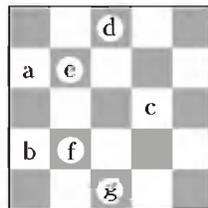


Рис.3

коней расставить нельзя. Заметим, что количество коней, расположенных на черных клетках, равно количеству коней, расположенных на белых клетках. Значит, если число пустых белых клеток равно  $n$ , то число пустых черных клеток равно  $n + 1$ .

Заметим, что для оптимального расположения коней центральная клетка пуста, так как в противном случае из восьми клеток, которые бьет конь, стоящий на центральной поле, ровно шесть пустых белых. Отсюда  $n \geq 6$ , и число коней не превосходит

$$25 - n - (n + 1) \leq 12.$$

Разобьем белые клетки на четыре группы так, как показано на рисунке 2 (клетки одной группы отмечены одинаковыми цифрами). Покажем, что для оптимального расположения по крайней мере одна клетка каждой группы пуста, отсюда будет следовать, что  $n \geq 4$ . Предположим противное: например, что на всех клетках группы 3 стоят кони. Обозначим их буквами  $a, b$  и  $c$

(рис.3). Конь, стоящий на клетке  $a$ , бьет клетки  $f, d$  и центральную. Но, как было показано выше, центральная клетка пуста, значит, на клетках  $f$  и  $d$  стоят кони. Аналогично можно показать, что на клетках  $e$  и  $g$  тоже стоят кони. Но тогда конь, стоящий на клетке  $c$ , бьет четырех коней, расположенных на  $d, e, f$  и  $g$ , что противоречит условию.

Итак, число пустых белых клеток  $n \geq 4$ . Значит, число коней не больше

$$25 - n - (n + 1) \leq 16.$$

*М. Горелов*

**М1737.** Хорды  $AC$  и  $BD$  окружности с центром  $O$  пересекаются в точке  $K$  (рис.1). Точки  $M, N$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $AKB$  и  $CKD$ . Докажите, что  $OMKN$  — параллелограмм.

Пусть  $X$  — середина  $KB$  (рис.2). Тогда  $\angle KMX = \frac{1}{2} \angle KMB = \frac{1}{2} \angle KAB = \angle KDC$ .

Поскольку  $MX \perp BD$ ,

то  $KM \perp CD$ . Так как при этом  $ON \perp CD$ , то  $ON \parallel KM$ . Аналогично,  $OM \parallel KN$ .

Если точки  $O, K, M, N$  не лежат на одной прямой, то  $OMKN$  — параллелограмм и  $OM = KN$ . В противном случае рассмотрим ортогональные проекции отрезков  $OM$  и  $KN$  на  $AC$ . Так как точки  $O, M, N$  проектируются, соответственно, в середины отрезков  $AC, AK, KC$ , то проекции обоих параллельных отрезков равны  $KC/2$ . Следовательно, равны и длины самих отрезков.

*А. Заславский*

**М1738.** Из колоды вынули 7 карт, показали всем, перетасовали и раздали двум игрокам по 3 карты, а оставшуюся карту

а) спрятали;

б) отдали постороннему наблюдателю.

Игроки могут по очереди сообщать вслух открытым текстом любую информацию о своих картах. Могут ли они сообщать друг другу свои карты так, чтобы при этом посторонний наблюдатель не смог вычислить местонахождение ни одной из карт, которых он не видит?

Назовем игроков Гришей и Лешей, а наблюдателя — Колей.

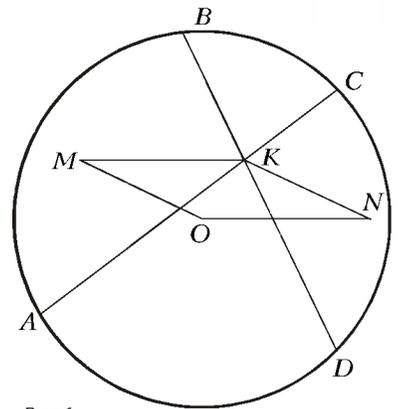


Рис.1

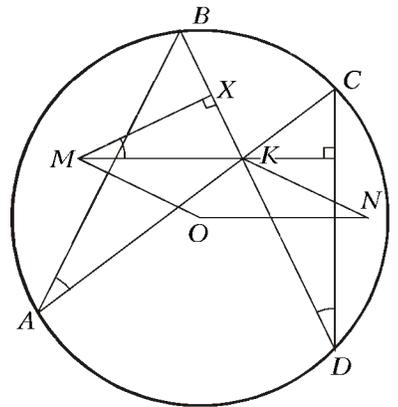


Рис.2

а) Пусть Гриша скажет: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты, которых у него нет}». После этого Леша должен сказать: «У меня либо {называет свои карты}, либо {называет три карты Гриши, если второй из наборов, названных Гришей, не совпадает с его набором, и любые другие три карты, которых у него нет, в противном случае}». После этого каждый из них, очевидно, знает весь расклад. Коле же ничего не ясно. Действительно, названо три набора карт:  $A, B$  и  $C$ . Наборы  $B$  и  $C$  пересекаются по двум картам, Гриша сказал: «У меня либо  $A$ , либо  $B$ », Леша сказал: «У меня либо  $A$ , либо  $C$ ». Это означает, что либо у Гриши набор  $A$ , а у Леша –  $C$ , либо у Гриши –  $B$ , а у Леша –  $A$ . Конечно, эти расклады различны, и даже закрытую карту определить нельзя.

б) Заметим, что предыдущий способ не работает: зная закрытую карту, Коля может все определить. Занумеруем карты числами от 0 до 6. Пусть Гриша и Леша по очереди назовут остатки от деления суммы номеров своих карт на 7. Тогда они узнают расклад: каждый из них должен лишь прибавить к своей сумме сумму другого и найти остаток, противоположный этой общей сумме по модулю 7 (т.е. такой, который при прибавлении к этой сумме дает число, делящееся на 7). Это и будет номер закрытой карты. После этого восстановление расклада не составляет труда. Проверим, что Коля ничего не узнал. Рассмотрим карту с номером  $s$ . Покажем, что она могла попасть к Грише, если он назвал сумму  $a$ . Для этого надо дополнить эту карту двумя другими с суммой номеров  $a - s$ . Легко видеть, что существует три различные пары номеров, дающие в сумме  $a - s$ . Из них две, возможно, испорчены тем, что туда входит карта с номером  $s$  или закрытая карта, но как минимум одна пара остается. Ею мы и дополним набор Гриши. Такие же рассуждения показывают, что любая карта могла оказаться и у Леша.

А. Шаповалов

**M1739.** Пусть  $A$  – произвольная четная цифра,  $B$  – произвольная нечетная цифра. Докажите, что существует натуральное число, делящееся на  $2^{2000}$ , каждая цифра которого – либо  $A$ , либо  $B$ .

Укажем способ составления из цифр  $A$  и  $B$  числа, делящегося на  $2^n$  для любого натурального  $n$ . Обозначим такое число  $G_n$ . При  $n = 1$  полагаем  $G_n = G_1 = A$ .

Пусть построено число  $G_k$  при  $n = k \geq 1$ . Воспользуемся им при построении следующего числа  $G_{k+1}$ , делящегося на  $2^{k+1}$ .

Если  $G_k$  делится на  $2^{k+1}$ , то полагаем  $G_{k+1} = G_k$ , в противном случае построим вспомогательное число  $F_k$ , обладающее следующими свойствами: число  $F_k$  составлено из цифр  $A$  и  $B$ , делится на  $2^k$  и имеет в своей десятичной записи ровно  $k$  цифр.

Если  $G_k$  имеет в своей записи ровно  $k$  цифр, то полагаем  $F_k = G_k$ .

Если в записи  $G_k$  более  $k$  цифр, положим  $F_k$  равным числу, получающемуся из  $G_k$  отбрасыванием старших цифр, начиная с  $(k + 1)$ -й. По признаку делимости на  $2^k$ , полученное из  $G_k$  после такой операции число  $F_k$  будет также делиться на  $2^k$ .

Если в записи  $G_k$  менее  $k$  цифр, припишем к числу  $G_k$  слева его же несколько раз таким образом, чтобы в результате получилось число, в записи которого не менее  $k$  цифр. Это число делится на  $G_k$  и, следовательно, на  $2^k$ . Если из него отбросить все старшие цифры, начиная с

$(k + 1)$ -й, то в результате получим число  $F_k$ , которое, по признаку делимости на  $2^k$ , также делится на  $2^k$ .

Если число  $F_k$  делится на  $2^{k+1}$ , то полагаем  $G_{k+1} = F_k$ , в противном случае полагаем  $G_{k+1} = \overline{BF_k}$ , приписав к числу  $F_k$  число  $B$  слева. Положив  $F_k = 2^k p$ , где  $p$  – некоторое нечетное число, получаем  $G_{k+1} = 10^k B + 2^k p = 2^k (5^k B + p)$ . В скобках стоит четное число, поэтому  $G_{k+1}$  делится на  $2^{k+1}$ .

И. Акулич, А. Жуков

**M1740.** Натуральные числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ . Докажите, что каждое из четырех чисел  $ab, bc, ca$  и  $ab + bc + ca$  является квадратом.

Можно записать:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca, \quad (*)$$

или иначе:

$$(a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca).$$

Значит, число  $ab + bc + ca$  является квадратом.

Равенство (\*) можно истолковать как квадратное уравнение относительно  $c$ .

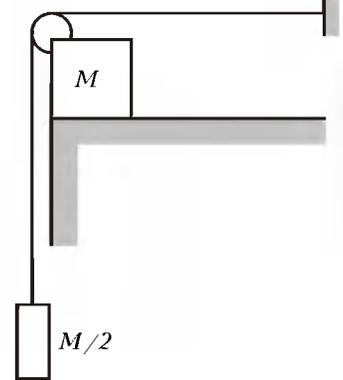
Поэтому

$$c = (a + b) \pm 2\sqrt{ab}.$$

Значит, число  $ab$  является квадратом. Точно так же убеждаемся, что числа  $bc$  и  $ca$  – тоже квадраты.

В. Произволов

**F1748.** На краю гладкого горизонтального стола удерживают куб массой  $M = 2$  кг (см. рисунок). Через небольшой гладкий выступ на ребре куба переброшена длинная легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой привязан груз массой  $M/2$ . Куб отпускают. Найдите его смещение за время  $\tau = 0,2$  с. Длина свисающего участка нити  $L = 2$  м. Привязанный к стене кусок нити практически горизонтален.



Заданный в условии интервал времени мал, это позволяет решить задачу без особых затруднений (иначе задачу просто нельзя будет решить, разве что приближенно).

Будем считать, что свисающий кусок нити с грузом на конце практически вертикален. Обозначим силу натяжения нити (с двух сторон невесомого блока силы натяжения одинаковы) буквой  $T$ . Ускорение груза, обозначим его величину буквой  $a$ , направлено вниз, а ускорение куба направлено вправо и по величине тоже равно  $a$ , поскольку сумма длин горизонтального и вертикального кусков нити неизменна. Запишем уравнения движения тел:

$$0,5Mg - T = 0,5Ma, \quad T = Ma.$$

Отсюда находим

$$a = g/3.$$

За время  $\tau$  смещение груза вниз составит

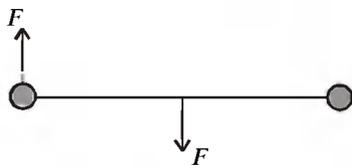
$$\frac{a\tau^2}{2} = \frac{g\tau^2}{6} = 6.7 \text{ см.}$$

На такую же величину сместится вправо куб.

Угол отклонения нити от вертикали определяется отношением смещения куба к длине свисающего куска нити – видно, что угол получится малым и отклонением нити от вертикали вполне можно пренебречь. Заметим, что длина свисающей части нити в ответ не входит и нужна именно для оценки величины угла – лишь бы он оказался малым.

Р.Блоков

**Ф1749.** На гладком столе покоится гантелька длиной  $L$ , состоящая из невесомого жесткого стержня и малень-



ких одинаковых шариков массой  $M$  каждый, закрепленных на концах стержня (см. рисунок). В некоторый момент на гантельку начинают

действовать две горизонтальные противоположно направленные силы величиной  $F$ , перпендикулярные стержню. Одна из них приложена к центру стержня, другая – к одному из шариков (силы все время остаются перпендикулярными к стержню и приложенными в упомянутых точках). Как будет двигаться стержень? За какое время стержень повернется на угол  $360^\circ$ ? Чему будет равна сила натяжения стержня в этот момент?

Сразу отметим, что сумма действующих на тело сил все время равна нулю, следовательно, ускорение центра масс равно нулю и середина стержня остается неподвижной – гантелька лишь вращается относительно этой точки.

Для вращения важен только результирующий вращательный момент сил, и можно упростить рассмотрение, немного изменив силы. Приложим их к шарикам на концах (увеличив вдвое «плечо»), но зато уменьшим их до  $F/2$ . Тогда движение рассчитать совсем просто. Касательное ускорение каждого шарика будет равно  $a = F/(2M)$ , и длину полной окружности диаметром  $L$  шарик пройдет за время  $\tau$ , определяемое из соотношения  $a\tau^2/2 = \pi L$ , откуда

$$\tau = 2\sqrt{\frac{\pi LM}{F}}.$$

К концу этого интервала шарик приобретет скорость  $v = a\tau$ . Нормальное ускорение шарика, равное  $v^2/R = v^2/(L/2)$ , определяется только силой натяжения стержня  $T$ . Отсюда находим

$$T = \frac{Mv^2}{R} = \frac{2Mv^2}{L} = 2\pi F.$$

А.Зильберман

**Ф1750.** В центре днища прямоугольной баржи длиной  $a = 80$  м, шириной  $b = 10$  м и высотой  $c = 5$  м образовалось

отверстие диаметром  $d = 1$  см. Оцените время, за которое баржа затонет, если не откачивать воду. Баржа открыта сверху, груза на ней нет, начальная высота бортов над уровнем воды  $h = 3,75$  м.

Так как действующая на баржу выталкивающая сила равна весу вытесненной ею воды, при заполнении баржи сила со стороны воды вне баржи будет расти пропорционально количеству затекшей воды.

Покажем сначала, что при погружении баржи разность уровней воды внутри и вне баржи не будет изменяться со временем. Обозначим массу самой баржи через  $m$ . Тогда условие плавания баржи, в которой нет воды, имеет вид

$$mg = \rho gab(c - h),$$

где  $\rho$  – плотность воды. Пусть баржа погрузилась так, что высота ее бортов над поверхностью воды стала  $h_1$ , а толщина слоя воды внутри баржи стала  $l$ . Теперь условие плавания принимает вид

$$mg + \rho gabl = \rho gab(c - h_1).$$

Из записанных уравнений получаем

$$c - h_1 - l = c - h,$$

т.е. разность уровней воды внутри и вне баржи в любой момент времени (пока баржа плавает) постоянна и равна разности высоты баржи и высоты борта непротекающей баржи. Следовательно, вода будет поступать в баржу с постоянной скоростью. Рассчитаем ее с помощью уравнения Бернулли.

Примем уровень поверхности воды в водоеме за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Тогда для трубки тока, которая начинается на уровне воды в водоеме и заканчивается на срезе отверстия в дне, можно записать

$$p_0 - \rho g(c - h_1 - l) + \frac{\rho v^2}{2} = p_0,$$

где  $p_0$  – атмосферное давление,  $v$  – скорость воды в момент ее затекания в баржу. Уравнение Бернулли записано с учетом того, что площадь поверхности воды внутри баржи много больше площади отверстия, поэтому скорость подъема уровня воды много меньше скорости  $v$  и ею можно пренебречь. Таким образом, для скорости затекания воды в баржу получаем

$$v = \sqrt{2g(c - h_1 - l)} = \sqrt{2g(c - h)}.$$

Баржа затонет тогда, когда ее борта сравняются с поверхностью воды, т.е. когда уровень воды над полом баржи достигнет величины  $h$ . В этот момент внутри баржи будет содержаться объем воды

$$V = abh = Sv\Delta t,$$

где  $S = \pi d^2/4$  – площадь отверстия,  $\Delta t$  – искомое время. Отсюда окончательно получаем

$$\Delta t = \frac{4abh}{\pi d^2 \sqrt{2g(c - h)}} \approx \approx 7,6 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 2111 \text{ ч} \approx 88 \text{ сут} \approx 3 \text{ мес.}$$

С.Варламов

**Ф1751.** На горизонтальном столе лежит однородное кольцо массой  $M$  с насаженной на него маленькой бусинкой массой  $m$ . В начальный момент времени бусинка

имеет скорость  $v$ , а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.

Поскольку в начальный момент времени кольцо покоится, начальная скорость бусинки направлена по касательной к кольцу. Направим ось  $X$  лабораторной системы отсчета  $K$  вдоль скорости бусинки  $v$ , а ось  $Y$  этой системы координат проведем через бусинку и центр кольца. Перейдем в систему отсчета  $K_1$ , связанную с центром масс кольца и бусинки, и договоримся, что оси  $X_1, Y_1$  сонаправлены с осями  $X, Y$ . Эта система отсчета движется относительно системы  $K$  со скоростью

$$u = \frac{mv}{m+M}.$$

В системе отсчета  $K_1$  бусинка и центр кольца совершают равномерные движения по окружностям, центры которых совпадают с центром масс. При этом в начальный момент времени проекции скорости бусинки на оси  $X_1$  и  $Y_1$  равны, соответственно,

$$v_{x_1}(0) = v - u = v - \frac{mv}{m+M} = \frac{Mv}{m+M}$$

и

$$v_{y_1}(0) = 0,$$

а с течением времени изменяются следующим образом:

$$v_{x_1} = \frac{Mv}{m+M} \cos \omega t \text{ и } v_{y_1} = \frac{Mv}{m+M} \sin \omega t,$$

где  $\omega$  – некоторая частота.

Возвращаясь в систему отсчета  $K$ , получим проекции скорости бусинки на оси  $X$  и  $Y$ :

$$v_x = \frac{Mv}{m+M} \cos \omega t + \frac{mv}{m+M} \text{ и } v_y = \frac{Mv}{m+M} \sin \omega t.$$

Кинетическая энергия бусинки равна

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) = \\ &= \frac{m}{2} \left( \frac{M^2 v^2}{(m+M)^2} \cos^2 \omega t + \frac{2mMv^2}{(m+M)^2} \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 v^2}{(m+M)^2} + \frac{M^2 v^2}{(m+M)^2} \sin^2 \omega t \right) = \\ &= \frac{mv^2}{2(m+M)^2} (M^2 + m^2 + 2mM \cos \omega t). \end{aligned}$$

Она становится минимальной в тот момент времени, когда косинус принимает значение  $-1$ . Следовательно,

$$E_{k\min} = \frac{mv^2}{2} \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

*Р.Компанеец*

**Ф1752.** Газ с молярной массой  $M = 60$  г/моль находится в герметичном сосуде с жесткими стенками и поддерживается при постоянной температуре  $T = 0$  °С. Площадь поперечного сечения молекул, которые можно рассматривать как твердые шарики, равна  $S = 10^{-19}$  м<sup>2</sup>. Давление газа в начале эксперимента  $p_0 = 100$  Па. При освещении газа ультрафиолетовым светом молекулы,

поглотившие квант света, переходят в возбужденное состояние. Среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии  $\tau = 10^{-3}$  с. При столкновении двух возбужденных молекул в газе происходит химическая реакция, в результате которой образуется одна новая молекула. Известно, что за 1 секунду в каждом кубическом сантиметре газа возбуждается  $N = 10^{12}$  молекул. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на  $\epsilon = 1\%$  от первоначального.

При указанных в условии задачи температуре, молярной массе и давлении молекулы движутся со средними скоростями

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 337 \text{ м/с},$$

значит, за время своей жизни  $\tau$  возбужденная молекула пролетает расстояние

$$L = v\tau \approx 3,4 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$$

Объем, в котором летящая молекула может за это время столкнуться с другими молекулами, равен  $V \approx 4LS$ . Концентрация невозбужденных молекул в сосуде перед началом освещения равна

$$n = \frac{p_0 N_A}{RT} \approx 2,7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3},$$

где  $N_A$  – постоянная Авогадро,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Концентрация же возбужденных молекул составляет

$$n_b = \tau N \cdot 10^6 \approx 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Одна возбужденная молекула за свое время жизни  $\tau$  могла бы столкнуться с другими возбужденными молекулами  $\nu_1$  раз, причем

$$\nu_1 = V n_b = 4v\tau S n_b.$$

Значит, всего за это время в одном кубическом метре между возбужденными молекулами происходит

$$\nu = \frac{1}{2} \nu_1 n_b = 2v\tau S n_b^2 \approx 0,68 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$$

столкновений. Коэффициент  $1/2$  появляется здесь из-за того, что столкновения парные, т.е. в каждом участвуют две молекулы. При каждом таком столкновении одна молекула исчезает, поэтому скорость убывания концентрации равна

$$\beta = \frac{\nu}{\tau} = 2v S n_b^2 \approx 6,8 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Давление в сосуде уменьшится на  $\epsilon = 1\% = 0,01$  тогда, когда на такую же величину уменьшится концентрация молекул  $n$ . Это произойдет через время

$$t = \frac{\epsilon n}{\beta} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 46 \text{ сут}.$$

Следует отметить, что ответ носит оценочный характер, т.е. время вычислено по порядку величины. Это связано с тем, что в расчетах более правильно использовать не среднюю, а среднюю относительную скорость движения молекул. Однако, ввиду того что эти скорости отличаются друг от друга не очень сильно (примерно в 1,4 раза),

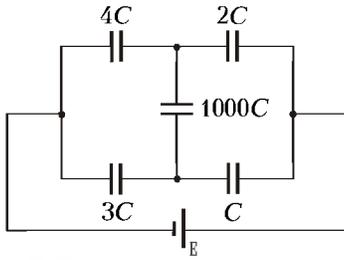


Рис.1

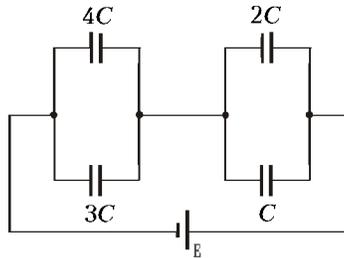


Рис.2

полученную оценку можно считать вполне удовлетворительной.

С.Варламов

**Ф1753.** Оцените установившийся заряд на конденсаторе емкостью 1000 С в схеме, изображенной на рисунке 1.

Из закона сохранения заряда следует, что заряды, образовавшиеся на всех конденсаторах, примерно одинаковы (по порядку величины). Однако разность потенциалов между обкладками конденсатора 1000С (точнее – емкостью 1000С), ввиду его большой емкости, очень мала по сравнению с разностями потенциалов между обкладками других конденсаторов. Поэтому в нулевом приближении можно считать, что вместо конденсатора 1000С в схеме имеется проводящая перемычка. Тогда схему можно переписать в виде, показанном на рисунке 2.

Пусть  $U_1$  – напряжение на конденсаторах С и 2С,  $U_2$  – напряжение на конденсаторах 3С и 4С. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд, находящийся на соединенных друг с другом обкладках конденсаторов, равен нулю, т.е.

$$3CU_2 + 4CU_2 = CU_1 + 2CU_1,$$

откуда получаем

$$U_2 = \frac{3}{7}U_1.$$

Учитывая, что

$$E = U_1 + U_2,$$

находим

$$U_1 = 0,7E, U_2 = 0,3E.$$

Теперь, после того как мы оценили величины напряжений на маленьких конденсаторах, можно вернуться к исходной схеме и оценить накопленный конденсаторами заряд. Заряд на конденсаторе 3С приблизительно равен

$$q_1 = 3CU_2 = 0,9EC,$$

а заряд на конденсаторе С –

$$q_2 = CU_1 = 0,7EC.$$

Таким образом, заряд, накопленный конденсатором 1000С, равен

$$q \approx q_1 - q_2 = 0,2EC.$$

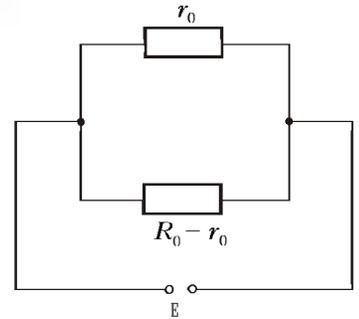
Отметим, что полученная нами оценка величины заряда очень близка к точному ответу

$$q = \frac{EC}{5 + 12/1000},$$

который можно получить, аккуратно проведя все необходимые вычисления. Видно, что оценочный результат отличается от точного не более чем на 0,2%.

О.Шведов

**Ф1754.** Резисторы сопротивлениями  $R, 2R, 3R, \dots, 100R$  соединены последовательно. Концы этой цепи замыкают, после чего к точке их соединения подключают один из проводов, идущих от батарейки с ЭДС  $E$  и нулевым внутренним сопротивлением. Между какими резисторами сопротивлениями  $nR$  и  $(n+1)R$  нужно подключить второй провод, идущий от батарейки, чтобы ток через батарейку был наименьшим?



Если второй провод, идущий от батарейки, подключен между резисторами сопротивлениями  $nR$  и  $(n+1)R$ , то схему можно представить в виде, показанном на рисунке, где

$$R_0 = R + 2R + \dots + 100R = \frac{100 \cdot 101}{2}R,$$

$$r_0 = R + 2R + \dots + nR = \frac{n(n+1)}{2}R.$$

Тогда сила тока, протекающего через батарейку, равна

$$I = \frac{E}{r_0} + \frac{E}{R_0 - r_0} = \frac{ER_0}{r_0(R_0 - r_0)}.$$

Минимально возможное значение силы тока  $I$  можно искать разными способами. Наиболее формальный из них состоит в следующем. Рассмотрим знаменатель последней формулы как квадратный трехчлен

$$y(r_0) = -r_0^2 + r_0R_0.$$

Известно, что квадратный трехчлен вида  $y(x) = ax^2 + bx + c$  достигает экстремума при  $x = -b/(2a)$ . В нашем случае  $y(r_0)$  достигает максимума при  $r_0 = R_0/2$ . Отсюда получаем условие на величину  $n$ :

$$\frac{n(n+1)}{2}R = \frac{100 \cdot 101}{2 \cdot 2}R,$$

которое сводится к квадратному уравнению

$$n^2 + n - 5050 = 0.$$

Решая его, находим

$$n \approx 70,565.$$

Поскольку  $n$  может принимать только целые значения, в качестве ответа следует принять наиболее близкое целое число, т.е.  $n = 71$ .

Другой способ отыскания минимума выражения для силы тока состоит в алгебраическом преобразовании знаменателя и приведении его к следующему виду:

$$\begin{aligned} r_0(R_0 - r_0) &= \left(\frac{R_0}{2} + \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\right) \left(\frac{R_0}{2} - \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\right) = \\ &= \left(\frac{R_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Видно, что знаменатель представим в виде разности двух величин, одна из которых постоянна, а другая зависит от  $r_0$ . Понятно, что знаменатель достигает максимума (а сила тока – минимума) тогда, когда второе слагаемое обращается в ноль, т.е. при  $\tilde{r}_0 = R_0/2$ . Далее ход решения аналогичен описанному раньше.

Итак, второй провод от батарейки следует подключить между 71-м и 72-м резисторами.

О.Шведов

**Ф1755.** Катушка индуктивностью  $L$  подключена параллельно конденсатору емкостью  $C$ , а последовательно с получившимся колебательным контуром включен еще один конденсатор емкостью  $C$ . К выводам цепочки присоединяют батарейку напряжением  $U_0$ . Найдите максимальную величину заряда каждого из конденсаторов и максимальный ток через катушку. Какое количество теплоты выделится в системе за большое время? Сопротивление соединительных проводов невелико, элементы цепи считать идеальными.

Сумма напряжений конденсаторов постоянна и равна напряжению батарейки  $U_0$ , поэтому в тот момент, когда заряд (напряжение) одного из них максимален, заряд другого минимален, и наоборот. В эти моменты токи зарядки (или разрядки) конденсаторов равны нулю, следовательно, и ток через катушку в эти моменты нулевой.

Обозначим заряд уединенного конденсатора  $Q$ , а соединенного параллельно с катушкой –  $q$ . Тогда можно записать уравнения

$$\frac{Q}{C} + \frac{q}{C} = U_0, \quad \frac{Q^2}{2C} + \frac{q^2}{2C} = QU_0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$Q = CU_0 \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad q = \pm \frac{CU_0}{\sqrt{2}}.$$

В числах, чуть округляя, получим максимальное значение заряда уединенного конденсатора  $1,7CU_0$ , а конденсатора, соединенного с катушкой,  $0,7CU_0$ .

Для нахождения максимального тока через катушку заметим, что в момент максимальности тока ЭДС индукции катушки обращается в ноль, параллельно подключенный конденсатор оказывается незаряженным, а второй конденсатор имеет напряжение  $U_0$ . Тогда для энергии запишем

$$\frac{LI_m^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = CU_0U_0.$$

Отсюда найдем

$$I_m = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Через большое время ток через катушку прекратится, параллельный конденсатор будет разряжен, второй конденсатор будет заряжен до напряжения батарейки. Из энергетического соотношения

$$\frac{CU_0^2}{2} + W_{\text{тепл}} = CU_0U_0$$

находим искомое количество теплоты:

$$W_{\text{тепл}} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

З.Рафаилов

**Ф1756.** Двухпроводный кабель в пластмассовой изоляции имеет емкость 25 пФ на метр длины и индуктивность 1 мкГн на метр длины (учитываются оба проводника). С какой скоростью распространяется в этом кабеле низкочастотная электромагнитная волна? Какой резистор нужно включить на конце этого кабеля, чтобы не было отражений сигнала?

Непосредственный расчет токов и напряжений в кабеле сильно выходит за рамки школьной программы. Но задачу можно решить, заменив кабель эквивалентной схемой, содержащей множество одинаковых звеньев (рис.1),

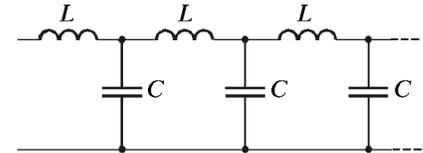


Рис.1

каждое из которых состоит из катушки индуктивности и конденсатора (так сказать, порежем кабель на маленькие кусочки). Если, например, длина такого кусочка равна 1 м, то индуктивность катушки будет 1 мкГн, а емкость конденсатора составит 25 пФ, при кусочках длиной 2 м индуктивность будет 2 мкГн, а емкость составит 50 пФ. Видно, что выбор наш не вполне произволен: если взять кусок побольше, то в разных частях этого куска напряжения и токи будут иметь существенно различные фазы, и этим уже нельзя будет пренебрегать. Поэтому будем заранее считать кусочки маленькими, а в процессе решения выясним разумность нашей модели.

Итак, обозначим буквами  $L$  и  $C$  индуктивность и емкость одного звена (предполагаем эти величины малыми). В идеальном кабеле нет потерь энергии, поэтому амплитуда переменного напряжения не должна изменяться от ячейки к ячейке (как и амплитуда тока, разумеется), а частота колебаний пусть будет  $\omega$  (в условии задачи упомянута «низкочастотная» волна, значит,  $\omega$  должна быть малой, а в процессе решения мы посмотрим – по сравнению с чем). Разность токов соседних катушек равна току конденсатора, включенного между ними, разность напряжений между соседними конденсаторами равна напряжению на катушке, которая включена между ними (на рисунке

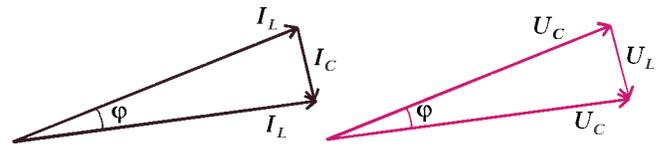


Рис.2

2 на векторных диаграммах токов и напряжений относящиеся к конденсаторам векторы нарисованы красным). Треугольники токов и напряжений подобны, малые углы при вершине каждого из них равны  $\phi$ , тогда для малых углов можно записать

$$I_C = I_L \phi, \quad U_L = U_C \phi.$$

Как обычно, соотношения между токами и напряжениями для гармонических колебаний имеют вид

$$U_C = I_C X_C, \quad U_L = I_L X_L,$$

где  $X_C = 1/(\omega C)$  и  $X_L = \omega L$ . Выразим отсюда значение

угла  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega\sqrt{LC}.$$

Видно, что при малых частотах угол получается и в самом деле малым, достаточно взять  $\omega \approx 1/\sqrt{LC}$  – при малых значениях индуктивности и емкости «малая частота» получается довольно большой. В нашем случае  $\omega \approx 1/\sqrt{LC} = 2 \cdot 10^8$  1/с, или в привычных нам герцах получается  $3 \cdot 10^7$  Гц, т.е. частота может достигать нескольких десятков миллионов герц – не так уж и мало... Запоздывание в расчете на одну ячейку составляет  $\tau = \varphi/\omega = \sqrt{LC}$ . Для ячеек метровой длины ( $l = 1$  м) скорость получается равной

$$v = \frac{l}{\tau} = \frac{l}{\sqrt{LC}} = 2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

– в полтора раза меньше скорости света в вакууме. Видно, что при другой длине кусочка ответ получается таким же, лишь бы длина кусочка была малой.

Найдем теперь соотношение между приложенным к цепи напряжением и током, «втекающим» в цепь: при амплитуде приложенного напряжения  $U$  напряжение на первой катушке  $U_L = U\varphi$ , ток  $I = U_L/X_L$ , сопротивление цепи  $Z = U/I = \omega L/\varphi = \sqrt{L/C} = 200$  Ом. Получилось «обычное» сопротивление – не индуктивное и не емкостное. Если кабель имеет конечную длину (так обычно и бывает), то на конце кабеля можно включить именно такой резистор (чаще встречаются кабели с «волновым» сопротивлением 75 или 50 Ом).

### 3. Волнов

**Ф1757.** *Стеклопластиковая пластинка имеет в сечении форму равнобокой трапеции (рис.1). Основание трапеции  $D$ , высота  $L$  ( $D > L$ ), а угол между боковыми сторонами*

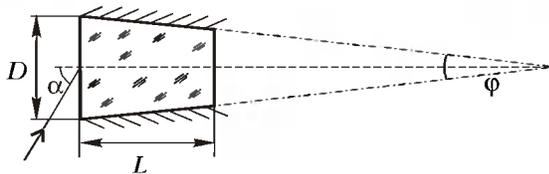


Рис.1

$\varphi$ ? 1. Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла  $n$ . При каких углах падения  $\alpha$  луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?

Луч света, попав в пластинку, несколько раз отразится от ее посеребренных боковых поверхностей, после чего попадет на малое основание пластинки. Луч пройдет через это основание только в том случае, если угол падения света на него не превысит угла полного внутреннего отражения, величина которого определяется законом преломления:

$$\sin \beta_{\max} = \frac{1}{n}.$$

Для того чтобы было проще рассматривать отражения от боковых поверхностей, воспользуемся приемом, который позволяет заменить распространение света с многократными отражениями на прямолинейное. Последовательно

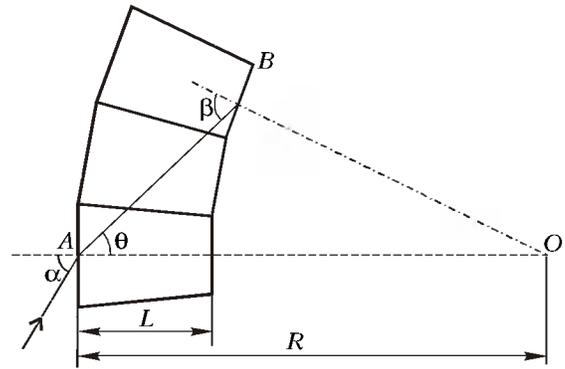


Рис.2

отразим несколько раз пластинку относительно ее боковой поверхности, на которой происходит очередное отражение света, и представим, что луч проходит эту боковую поверхность насквозь (рис.2). Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока луч не упрется в малое основание после очередного «отражения» пластинки. Фактически это выглядит так, как будто мы отражаем пластинку вместе с идущим в ней лучом. При этом величина угла падения света на малое основание после последнего «отражения» пластинки будет совпадать с величиной угла падения на основание реальной пластинки.

Теперь можно приступить к определению угла  $\alpha$ . Применим к треугольнику  $ABO$  теорему синусов:

$$\frac{\sin \theta}{R-L} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{R},$$

где

$$R = \frac{D}{2 \sin(\varphi/2)}.$$

Отсюда получим

$$\sin \theta_{\max} = \left(1 - \frac{L}{R}\right) \sin \beta_{\max} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2L}{D} \sin \frac{\varphi}{2}\right).$$

Интересующий нас угол определяется из соотношения

$$\sin \alpha_{\max} = n \sin \theta_{\max},$$

откуда, с учетом малости угла  $\varphi$ , окончательно имеем

$$\sin \alpha_{\max} \approx \left(1 - \frac{L\varphi}{D}\right).$$

Итак, луч света пройдет через пластинку при углах падения на ее основание

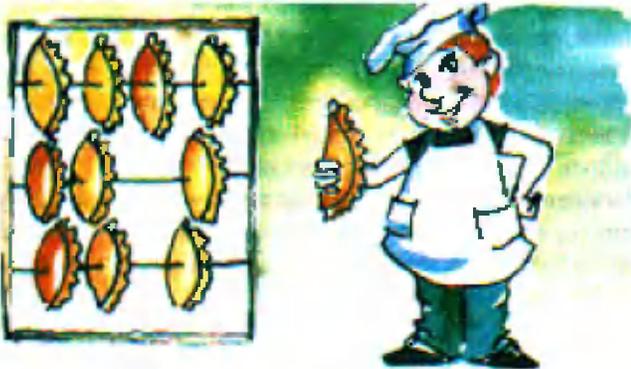
$$\alpha \leq \alpha_{\max} \approx \arcsin\left(1 - \frac{L\varphi}{D}\right).$$

Ю. Старокуров

# Задачи

**1.** У Лени и Олега были пирожки, которые они поделили пополам. Затем пришел Коля и принес еще 8 пирожков, после чего все пирожки снова поделили поровну. «Теперь мне досталось меньше», – заметил Лена, – но если бы у Коли было на 6 пирожков больше, то мне бы досталось больше пирожков, чем до его прихода». Сколько пирожков досталось каждому?

*Д. Калинин*



**4.** У Пети имеется стеклянный запаянный аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда, который не полностью заполнен водой. Петя заметил, что на какую грань аквариум ни ставь, вода всегда не достает до верха 3 см. Петя предполагает, что аквариум имеет форму куба. Верно ли это предположение?

*Д. Калинин*

**2.** Аня, Маня и Ваня задумали три различных двузначных числа. Оказалось, что каждое из этих чисел делится на сумму квадратов своих цифр. Какие числа задумали Аня, Маня и Ваня?

*Д. Мамедьяров*



**5.** Набор из 20 гирек обладает таким свойством: если произвольным образом по 5 гирек положить на 2 чашки двухчашечных весов, то оставшиеся 10 гирек можно так разложить по 5 штук на 2 чашки, что весы будут в равновесии. Докажите, что набор можно разложить на 2 группы по 10 гирек так, что в каждой группе массы всех гирек одинаковы.

*В. Произволов*

**3.** Федерация состоит из 89 субъектов (областей, краев и т.п.), которые указом Президента были объединены в 7 федеральных округов. Согласно указу, в каждом округе один субъект является старшим, ему подчиняются два или три средних, а все остальные субъекты – младшие, причем каждому среднему подчиняются два или три младших.

В Лесном округе больше субъектов, чем в Болотном, а в Речном – больше, чем в Холмистом. В каком округе субъектов больше – в Снежном или Пустынном?

*И. Акулич*

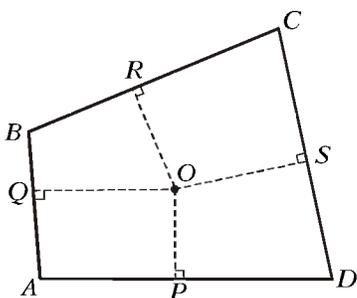


# Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы завершаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высыпайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков.

16. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  нашлась такая точка  $O$ , что основания перпендикуляров  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  разбивают стороны четырехугольника на части,



удовлетворяющие неравенствам  $DP \geq PA$ ;  $AQ \geq QB$ ;  $BR \geq RC$ ;  $CS \geq SD$ . Докажите, что точка  $O$  – центр описанной около четырехугольника  $ABCD$  окружности.

*В.Произволов*

17. Существует ли такое натуральное число  $n$ , что последовательность чисел  $n + 1$ ,  $2n + 1$ ,  $3n + 1$ ,  $4n + 1$ , ... не содержит полных кубов?

*В.Сендеров, А.Стивак*

18. Два жадных медвежонка нашли килограммовую головку сыра и попросили лису поделить ее поровну.

Лиса сначала разломала сыр на две неравные части, а затем откусила от одной из частей (не обязательно большей) половину. Так как части после этого все-таки остались неравными, лиса снова откусила от одной из частей половину, и так далее. Лишь после десятого откусывания части сравнялись, но на долю медвежат досталось меньше 20 граммов сыра.

Обиженные медвежата потом жаловались, что части можно было бы уравнивать, откусывая по половине от какой-либо части не больше трех раз (а вовсе не десять!). Правы ли они?

*И.Акулич*

19. В строку записано несколько чисел. Разрешается выбрать пару рядом стоящих чисел, в которой левое число больше правого, поменять оба числа местами и умножить оба на 2. Докажите, что рано или поздно перестановки прекратятся.

*А.Шаповалов*

20. Начав с угла, пьяный король обошел все клетки шахматной доски  $5 \times 5$  по разу и вернулся на исходное поле, ни разу не сделав двух ходов подряд в одном направлении. Центры соседних полей его маршрута последовательно соединили отрезками. Докажите, что получилась самопересекающаяся ломаная.

*А.Шаповалов*

## Сколько мест в автобусе и другие задачи

**Д.КАЛИНИН**

ОДНАЖДЫ УТРОМ КРОЛИК СООБЩИЛ ВСЕМ-всем-всем удивительную новость: в лес приехал автобус!

– Кто такой Автобус? – с опаской спросил Пятачок.  
– И что он ест на обед?

– Автобус не кто, а что, глупый маленький поросенок, – отозвался Кролик. – В нем катаются!

– Ой, – восхитился Пятачок, – это такая лужа, и в ней катаются с боку на бок?

– Нет, это не лужа, это такой дом на колесах, –

ответил Кролик. Немного помолчал и признался: – А как в нем катаются, я точно не знаю...

– Я знаю, – скромно заметил Винни-Пух. – Мы с Кристофером Робинем однажды ездили на автобусе. В гости к Родным и Знакомым. В автобус залезают по лесенке и садятся на сиденье. Потом он говорит «р-р-р» и едет, а вы сидите себе и смотрите в окошко.

– А можно кататься на автобусе с друзьями? – поинтересовался Пятачок.

– Думаю, туда влезут Все-все-все, – сказал Винни-Пух. – Автобус – он большой.

– Неужели Все-все-все? – Кролик засомневался. – И ты, и ты, и я, и Тигра, и Кенга... крошка Ру поедет в кармане... и Сова, и Иа... Винни, а сколько там сидений?

– Ох, Кролик, не знаю. Они двухместные и одноместные, а вот сколько их...

– Ну вспомни, ты же один из нас видал автобус! – сказал Кролик. – Хоть у тебя в голове и опилки, но считаешь ты неплохо... иногда!

Винни задумался и ответил:

– Мы ехали сначала Туда... И в автобусе было 11 пассажиров, кроме нас с Кристофером Робинем, а свободными оставались 9 сидений. А потом мы ехали Обратно, и были свободны 6 сидений. А пассажиров было только десять – вместе с нами. Как так получается?.. – и Пух замолчал, почесывая затылок.

– Сам же говорил, что сидения двухместные и одноместные, – напомнил Кролик.

Тут все призадумались, и думали, и думали, так что Винни-Пух вскоре позабыл об автобусе и вспомнил о горшочке меда, почти полном, который ждал дома на полке...

– Нашел! – радостно завопил Пятачок. – В автобусе 16 сидений: 6 двухместных и 10 одноместных!

Пух с трудом отвлекся от меда и спросил:

– Почему?

– Ну посмотри же! – возбужденно верещал Пятачок. – Вот я нарисовал все сиденья. Когда ты ехал Туда, заняты были только двухместные сиденья, а когда Обратно – все сидели по одному!

– Правда, все получается! – удивился Пух. – Пятачок, какой ты, оказывается, умный!

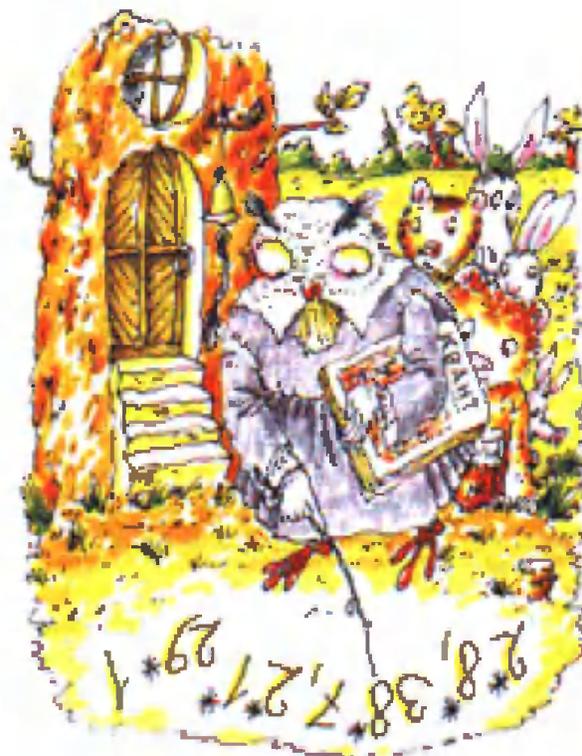
Пятачок зарделся от удовольствия.

– А вдруг по-другому тоже получится? – озабоченно спросил Кролик.

Но как ни размышляли остальные, по-другому не получалось. Пришлось идти к Сове.

Сова попросила повторить вопрос несколько раз. Потом сказала:

– Очевидно. – Помолчала важно пару минут и продолжила: – Совершенно очевидно, что меньше 16 сидений быть не может. – Еще немного подождала и снисходительно объяснила: – Понимаешь, Винни, 13 пассажиров могут занять минимум 7 сидений: одноместное и шесть двухместных. А если 9 сидений остались пустыми, то всего в автобусе не менее 7 плюс 9... да, не менее 16 сидений.



Пух сказал:

– Да, теперь, когда ты объяснила... – лихорадочно пытаюсь сообразить, что такое «минимум».

– Но это еще не все! – Сова подняла палец на правой лапе, дабы привлечь внимание. При этом она чуть не потеряла равновесие, но усидела и с достоинством продолжила: – В автобусе может быть максимум 16 мест!

При слове «максимум» Пух помрачнел еще больше.

– Сами посудите, – говорила Сова, – десять пассажиров могут занять самое большее десять сидений, а при этом 6 сидений оставались свободными! Тем самым, – заключила она с важным видом, – задача полностью решена. Ибо если сидений не больше и не меньше шестнадцати, то их ровно шестнадцать!

– Теперь все ясно, – с облегчением сказал Пух.

– Нет, – пискнул Пятачок. – Мы разобрались, сколько там сидений, а вот сколько в автобусе мест? Если захотят покататься Все-все-все... это же очень много народу!

– Как это сколько мест? – удивился Пух. – Шестнадцать сидений – значит... ах да, сколько из них каких, мы ведь не знаем...

И снова все задумались, и думали очень долго, пока Сова не сообщила:

– Неоднозначно.

– Будь здорова! – поспешно вставил Винни-Пух.

– Спасибо, Пух... Я не чихала... Так вот, неоднозначно! Если сидений ровно 16, то 13 пассажиров заняли минимум сидений – значит, они сидели на шести двухместных. Но те 9 сидений, что остались свободными, могут быть и двухместными, и одноместными, и

сколько из них каких, мы не можем узнать. Так что двухместных сидений в автобусе может быть от 6 до 15, а мест – от 17 до 31.

– Если их 31, пожалуй, влезут почти Все-все-все. А вот если 17, придется оставить дома большую часть Родных и Знакомых Кролика, – заключил Пятачок. – Боюсь, они обидятся...

Прошло несколько дней. Как-то раз утром, проходя мимо дома Совы, Винни-Пух застал ее за странным занятием. Сова рисовала на земле какие-то цифры и звездочки, бормоча себе под нос: «Нетривиально... А если так?..»

– Что это ты делаешь, Сова? – спросил Пух.

– Пытаюсь разрешить одну проблему, – отозвалась Сова. – Понимаешь, вот даны числа  $2*8*$ ,  $38*7$ ,  $2*1*$  и  $29*1$ . Надо вместо звездочек поставить различные цифры так, чтобы сумма первых двух чисел была равна сумме двух последних. Это задача с Конкурса головоломок, ее мне принес Кристофер Робин! Я сказала, что рада буду ему помочь, и вот, как видишь, тружусь.

– Послушай, Сова, а если вот так... – сказал Пух, беря палочку и выводя числа:

$2182 + 3837...$  Дальше написать он не успел, потому что Сова мрачно отозвалась:

– Так я уже пробовала, ничего не получается.

Пух сел рядом с Совой и тоже стал рисовать на земле цифры и звездочки. Первые два числа все время получались слишком большими, а складывать четырехзначные числа, когда в голове у тебя всего лишь опилки, очень трудно...

– Надо их сделать как можно меньше, – сказал Пух себе под нос. – Вот так:

$$2082 + 3817 = 5899.$$

– Что, что? – заинтересовалась Сова. – Какой ты молодчина, медвежонок! А вторые два числа надо сделать как можно больше, вот так:

$$2917 + 2981...$$

Что же это, Пух?! Получается только 5898!

– Значит, ничего не выходит? – спросил Винни-Пух. – Ведь 5898 меньше, чем 5899, и задачу решить нельзя!

– Винни, – сказала Сова. – Ты просто Выдающийся медведь! Мы же доказали, что решения нет, значит, задача решена!

Винни-Пух страшно смутился.

– А знаешь, Сова, – сказал он, чтобы что-нибудь сказать, – кажется, эта твоя задача похожа на задачу с автобусом, помнишь? Там тоже получалось: где-то больше, где-то меньше, а задача решена!

Сова помолчала и ответила:

– Ты не просто Выдающийся медведь, Пух! Твои опилки иногда мыслят просто Феерически!

– Будь здорова, – сказал Винни. Он был совершенно счастлив.

А вы, дорогие читатели, разберитесь, пожалуйста, в следующих историях, приключившихся с обитателями Леса.

**1.** Однажды в гости к Винни-Пуху прискакали три племянника Кролика: Асик, Басик и Васик. Винни спросил, что они сейчас подельвают, и узнал, что они просто гуляют, а морковки на обед им уже дали, но они их еще не сгрызли. «Отгадай, сколько у кого из нас морковок! У Асика и Басика вместе на 6 морковок больше, чем у Басика и меня!» – сказал Васик. «А всего у нас морковок 10», – добавил Асик. Винни довольно быстро ответил и заработал свою морковку. Как он это сделал?

**2.** В другой раз Пух стал свидетелем громкого спора между Асиком, Басиком и Васиком. Оказалось, они не поделили между собой яблоки. Всего уже было съедено 42 штуки, но Асик съел в 3 раза больше, чем Басик, а Васику досталось больше всех. Басик обиделся, но Васик заявил, что вообще-то Басик в среднем съел больше, чем он и Асик. Винни-Пух разнял распалившихся крольчат, приговаривая, что о съеденных яблоках спорить не стоит, а потом сообразил, что может определить, сколько яблок кто съел. Как это сделать?

**3.** Как-то Пух и Пятачок встретили на Опушке Иа-Иа, который сам с собой играл в шашки. Правда, игра была какой-то странной: доска, например, была размером  $6 \times 8$  (6 строк и 8 столбцов). «Да и шашек на доске много – в каждом столбце не менее двух», – заметил Пух. «Не так уж и много, – отозвался Пятачок, – в каждой строке не больше трех». Сколько же шашек могло стоять на доске? (Внимание: надо найти все возможные ответы!)

**4.** Однажды Пух с Кристофером Робинем ездили на автобусе в город за подарками Всем-всем-всем. В самом начале маршрута автобус был полностью набит пассажирами. На следующих 15 остановках пассажиры только выходили. Причем если водитель открывал только переднюю дверь, то успевали выйти ровно 4 пассажира, если только заднюю – ровно 5 пассажиров, а если открывались обе двери, то выходили 11 пассажиров. Всего на остановках вышли 95 пассажиров. Запомнив только это, Пух и Кристофер Робин смогли определить, сколько раз водитель открывал обе двери. Правда, они еще вспомнили, что на первой остановке была открыта только задняя дверь. Так сколько раз открывались обе двери?

**5.** Десять крольчат, двоюродных племянников Кролика, собирали наклейки с изображением разных сортов капусты и накопили их 64 штуки. После этого первый крольчонок сказал, что у него есть по крайней мере одна наклейка. «А у меня ровно на одну больше!» – сказал второй. «А у меня ровно на одну больше, чем у тебя!» – сказал третий второму. Затем такую же фразу произнес четвертый третьему, ..., девятый восьмому. А десятый девятому заявил: «У меня наклеек больше, чем у тебя!» Сколько наклеек было у каждого?

**6.** Однажды Пух узнал, что весь мед у пчел заполняет несколько бутылей по 50 литров каждая. Если его разлить в сорокалитровые бутыли, то понадобится на 5 бутылей больше, причем одна из них останется неполной. Если этот же мед разлить в бутыли по 70 литров, то получится на 4 бутыли меньше, и тоже одна бутыль останется неполной. Сколько меда насобирали пчелы?

**7.** Про некоторое число Сова сказала, что если его увеличить на 5 и возвести в квадрат, то получится трехзначное число. Если же его уменьшить на 4 и возвести в куб, то полученное число будет пятизначным. Какое это может быть число? Однозначно ли оно определяется?

## Физика 9–11

Публикуемая ниже заметка «Удивительная бутылка» предназначена девятиклассникам, заметка «Как в землю казан закопали» – десятиклассникам и «Изотопные источники энергии» – одиннадцатиклассникам.

# Удивительная бутылка

Е. РОМИШЕВСКИЙ

**М**НОГО ЗАГАДОЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ явлений связано с обыкновенной стеклянной бутылкой и содержащейся в ней жидкостью. Например, можно спросить себя или друзей: как быстрее наполнить или опорожнить бутылку; как интереснее ее утопить или извлечь из нее плотную пробку? Сейчас мы рассмотрим несколько необычную проблему: как разбить такую бутылку с жидкостью голыми руками (не используя каких-либо других физических тел), при этом, естественно, не поранив руки?

Вообразим такой эксперимент. Возьмем для конкретности обычную поллитровую бутылку, имеющую форму двух цилиндров – основной части и горлышка. Масса пустой бутылки приблизительно равна  $m_0 = 0,5$  кг. Нальем в нее воды столько, чтобы почти полностью заполнить основную цилиндрическую часть. При этом масса воды будет такой же, как и бутылки:  $m_в = 0,5$  кг. Одной рукой возьмем бутылку за горлышко и поместим ее над пустым открытым ведром. Затем, размахнувшись, резко ударим по горлышку мягкой подушкой ладони... Дно бутылки и ее нижняя часть вместе с водой окажутся в ведре, а верхняя часть бутылки с охватываемым горлышком – в сухой руке. Весьма эффектное зрелище!

Теперь попробуем все это осмыслить и сделать количественные оценки.

Главным результатом опыта является разбитое стекло, имеющее довольно большую толщину (порядка нескольких миллиметров). Чтобы разбить такое стекло, нужно создать довольно большие силы. Откуда они берутся?

Представим себе письменный стол, покрытый толстым прозрачным стеклом. Пусть на стекле лежит стальной

упругий шарик массой 100 г. На шарик действуют две силы: сила притяжения  $m\vec{g}$ , приложенная в центре шарика, и сила реакции поверхности стола  $\vec{F}_p$ , равная силе притяжения по величине, но противоположно направленная и приложенная в месте касания поверхностей шарика и стола. Непосредственно к поверхности стекла в том же месте касания приложена сила давления  $\vec{F}_д$  со стороны шарика, равная (согласно третьему закону Ньютона) по величине силе реакции, но противоположная ей по направлению. Таким образом, в месте касания на стекло действует сила давления

$$F_д = F_p = mg = 0,1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 1 \text{ Н}.$$

Этой силы явно недостаточно, чтобы разрушить стекло на столе. Однако, если шарик поднять над поверхностью стола сантиметров на двадцать и отпустить, то он, ударившись, несомненно разобьет стекло.

Рассмотрим процесс подробнее. Направим ось  $Y$  вверх над поверхностью стекла и изобразим графически зависимости ускорения, скорости и высоты шарика от времени (рис.1). Особенно выделим отрезок времени удара  $\tau$ , в течение которого шарик взаимодействует со стеклом. Как известно, при свободном падении ускорение шарика  $a_y = -g$ , скорость  $v_y = -gt$  и высота  $y = h_0 - gt^2/2$ . Для рассматриваемого случая  $h_0 = 20$  см, время падения  $t_1 = \sqrt{2h_0/g} = 0,2$  с, максимальная скорость  $v_{\max} = gt_1 = \sqrt{2gh_0} = 2$  м/с.

Оценим время  $\tau$  соударения шарика с поверхностью стекла. Разрушение стекла наступает при некоторой величине деформации его поверхности в

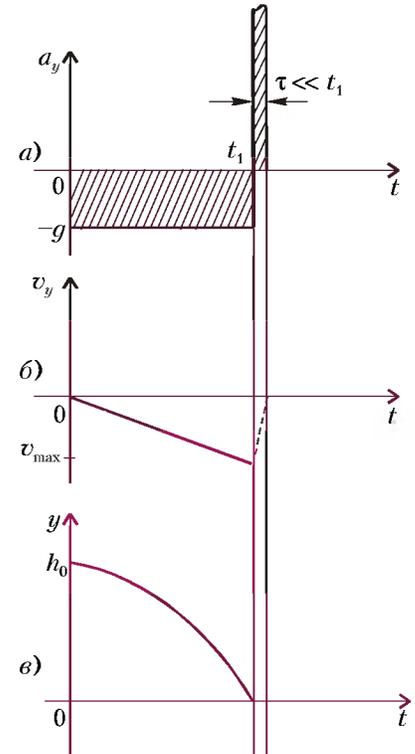


Рис. 1

месте контакта. На основании опытных данных можно принять в качестве такой величины  $\delta = 0,1$  мм =  $10^{-4}$  м. Значение скорости за время удара изменяется от  $v_{\max}$  до нуля, откуда время удара  $\tau = \delta/(v_{\max}/2) = 10^{-4}$  с (здесь считается, что скорость линейно падает со временем). Мы получили, что  $\tau$  приблизительно в тысячу раз меньше времени падения  $t_1$ . Легко понять, что два заштрихованных прямоугольника на рисунке 1, а имеют одну и ту же площадь, равную

$$v_{\max} \tau = gt_1 = \sqrt{2gh_0}.$$

Изменение скорости в течение времени  $\tau$  (мы имеем в виду абсолютно неупругий удар, потому что стекло разрушится еще при его сжатии) тоже равно  $v_{\max}$ , а значит, связанное с этим среднее ускорение (замедление)  $\bar{a} = v_{\max}/\tau = 10^3 g$  окажется приблизительно в тысячу раз больше  $g$  – вот это «перегрузка»! Таким образом, на графике ускорения высота положительного пика, отвечающего величине  $\bar{a}$ , будет в тысячу раз выше  $g$ .

Теперь оценим силу удара шарика по стеклу. Она тоже будет в тысячу раз больше силы тяжести:

$$F_{уд} = m\bar{a} = \frac{mgt_1}{\tau} \approx 10^3 \text{ Н}.$$

Это уже вполне ощутимая величина.

Силы, действующие во время удара, называют «мгновенными» силами. В процессе удара, длящегося очень малое время  $\tau$ , они резко увеличиваются от нуля до некоторого максимума, а затем снова падают до нуля. Под силами удара можно понимать среднее значение мгновенных сил за малое время удара, так чтобы выражение  $F_{\text{уд}} \tau = m \Delta v$  представляло собой изменение импульса тела за это время (величину  $F_{\text{уд}} \tau$  называют импульсом силы).

Уже давно было известно: чтобы получить «выигрыш» в силе, можно использовать рычаг. Нужно выбрать его точку опоры так, чтобы малая сила  $F_m$  имела большое плечо  $l_6$ , а «выигрышная» большая сила  $F_6$  – малое плечо  $l_m$ . При этом  $F_6 = F_m l_6 / l_m$ . В этом смысле удар является своеобразным рычагом – временным рычагом. Малая сила в течение большого времени  $t_1$  разгоняет шарик, а огромная сила удара  $F_{\text{уд}}$  за малое время  $\tau$  останавливает его, причем  $F_{\text{уд}} = m g t_1 / \tau \approx m g \cdot 10^3$ . Можно образно сказать, что в нашем случае получен «выигрыш» в силе в тысячу раз.

Отметим еще одно важное свойство удара. При соударении очень жестких тел, для которых деформации можно считать бесконечно малыми:  $\delta \rightarrow 0$ , скорости изменяются на конечные величины:  $\Delta v$ ;  $v$ . Оценка времени удара  $\tau \approx \delta / v$  тоже даст бесконечно малую величину:  $\tau \rightarrow 0$ . Из второго закона Ньютона, записанного в виде  $m \Delta v = F_{\text{уд}} \tau$ , видно, что произведение  $F_{\text{уд}} \tau$  является величиной конечной. Значит,  $F_{\text{уд}} \rightarrow \infty$ , т.е. величина ударной силы велика, и по сравнению с ней можно пренебрегать всеми другими конечными силами, действующими во время удара (например, силой тяжести).

Итак, теперь самое время вернуться к эксперименту с бутылкой.

Для того чтобы стекло бутылки лопнуло у ее дна, необходимо по этому дну хорошо ударить. Но чем? Рукой? Нет, потому что рукой произвести удар такой силы невозможно. К тому же, мы ударили рукой по горлышку – казалось бы, должно разбиться горлышко. Остается предположить, что этот удар по дну произвела вода, содержащаяся в бутылке. Но для этого нужно сначала воду «приподнять» от стеклянного дна на некоторую высоту и затем предоставить ей возможность «упасть» на него. Ведь вода несжимаема, и ее соударение с бутылкой напоминает удар тяжелого упругого шарика о стекло. Получается, что нужно ударить по горлышку с такой силой, чтобы уско-

рение бутылки было больше ускорения массы воды – только тогда между водой и дном бутылки сможет образоваться пустой объем, в котором давление будет близко к нулю. Затем после удара по горлышку, который длится малое время, происходит мощное «схлопывание» воды и бутылки под действием атмосферного давления. Соударение между водой и бутылкой, происходит за очень малое время и, как мы уже отмечали, приводит к очень большим разрушающим силам и давлениям.

Проведем необходимые количественные оценки. Прежде всего поставим главный вопрос: какова минимальная величина силы удара по горлышку, достаточная для того, чтобы оторвать воду от дна бутылки? Для этого рассмотрим основные действующие силы.

На воду сверху действует сила атмосферного давления  $F_a^b = p_a S$ , где  $S$  – сечение основной цилиндрической части бутылки. Будем считать, что  $p_a = 10^5$  Па, а  $S = \pi r^2 = 30 \text{ см}^2$  (это соответствует значению радиуса  $r \approx 3,1$  см); тогда  $F_a^b = 300$  Н. Под действием этой силы вся масса воды  $m = 0,5$  кг приобретет ускорение

$$a_b = \frac{F_a^b}{m} = 600 \text{ м/с}^2 = 60g.$$

На бутылку действуют следующие силы: сверху на горлышко действует сила нашего удара  $F$ , а снизу на дно бутылки действует сила атмосферного давления  $F_a^6 = p_a S = 300$  Н. Для того чтобы бутылка приобрела ускорение больше, чем вода (масса бутылки приблизительно равна массе воды), нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$F - F_a^6 > F_a^b,$$

т.е. сила нашего удара должна быть больше удвоенной силы атмосферного давления:

$$F > F_a^6 + F_a^b = 2F_a = 600 \text{ Н}.$$

Рассмотрим теперь подробнее первую фазу процесса – удар по горлышку. Допустим, что мы немного превысили величину минимальной необходимой силы и ударили с силой  $F_1 = 650$  Н. Тогда бутылка будет иметь ускорение

$$a_{6_1} = \frac{F_1 - F_a^6}{m} = 700 \text{ м/с}^2 = 70g,$$

а вода получит ускорение

$$a_{b_1} = \frac{F_a^b}{m} = 60g.$$

Будем считать, что время удара порядка сотой доли секунды, т.е.  $\tau_1 = 10^{-2}$  с,

и оценим толщину вакуумного слоя  $\Delta h$ , т.е. расстояние, на которое разойдутся бутылка и вода:

$$\Delta h = \frac{\Delta a \tau_1^2}{2} = \frac{10g \tau_1^2}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 5 \text{ мм}.$$

При этом вода и бутылка приобретут следующие скорости:

$$v_{b_1} = 60g \tau_1 = 6 \text{ м/с},$$

$$v_{6_1} = 70g \tau_1 = 7 \text{ м/с}.$$

После прекращения действия внешней силы (т.е. по истечении времени  $\tau_1$ ) начинается вторая фаза процесса. Теперь на бутылку будет действовать только сила атмосферного давления, направленная вверх, которая сообщит бутылке ускорение

$$a_{6_2} = -\frac{p_a S}{m} = -60g.$$

Это ускорение будет замедлять движение бутылки:

$$v_{6_2} = v_{6_1} - |a_{6_2}| t,$$

вода же будет продолжать движение с ускорением

$$a_{b_2} = a_{b_1} = +60g$$

и скоростью

$$v_{b_2} = v_{b_1} + a_{b_2} t.$$

Столкновение между водой и бутылкой произойдет еще через время  $\tau_2$ , за которое расстояние между ними сократится от  $\Delta h$  до нуля:

$$\tau_2 = \frac{v_{6_1} - v_{b_1}}{2a_b} + \sqrt{\frac{(v_{6_1} - v_{b_1})^2}{(2a_b)^2} + \frac{\Delta h}{a_b}}.$$

Оценку для этого времени получим из соотношения

$$\Delta h = \frac{\Delta a \tau_2^2}{2},$$

где  $\Delta a = a_{b_2} - a_{6_2} = 2a_b = 120g$ :

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{2\Delta h}{2a_b}} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Затем оценим значения скоростей воды и бутылки непосредственно перед их столкновением:

$$v_{b_2} = v_{b_1} + a_{b_2} \tau_2 = 7,8 \text{ м/с},$$

$$v_{6_2} = v_{6_1} - |a_{6_2}| \tau_2 = 5,2 \text{ м/с}.$$

Получается, что вода догоняет бутылку и, ударяя, может разбить ее.

Оценим теперь, какие силы и давления будут возникать непосредственно при соударении – это уже третья фаза процесса. Будем считать удар абсолютно неупругим (разрушение стек-

ла) и его характерное время равным  $\tau_3 = 10^{-4}$  с (как для шарика на стекле). Тогда изменение импульса каждого тела будет равно

$$m\Delta v = m \left( v_{b_2} - \frac{v_{b_2} + v_{6_2}}{2} \right) = \\ = m \left( \frac{v_{b_2} - v_{6_2}}{2} \right) = 0,65 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}},$$

а сила удара –

$$F_{\text{уд}} = \frac{m\Delta v}{\tau_3} = 6,5 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Давление у дна бутылки при этом составит

$$p = \frac{F_{\text{уд}}}{S} = \frac{6,5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{30 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} \approx 22 \text{ атм}$$

– весьма впечатляющая величина! Поскольку толщина стекла боковой поверхности бутылки обычно меньше, чем толщина дна (а «где тонко, там и рвется»), разрушение стекла происходит именно на боковой поверхности бутылки вблизи ее дна.

Подобно рисунку 1, на рисунке 2

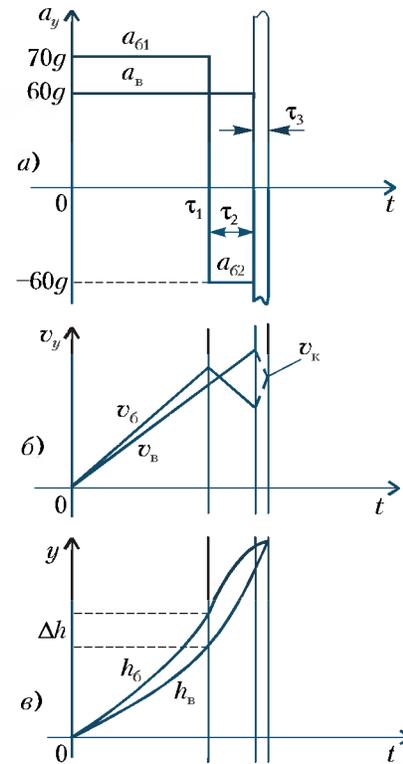


Рис. 2

представлен графически весь процесс в течение суммарного времени  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ , которое имеет порядок сотой доли секунды. На всю систему (бутылку с водой общей массой  $m = m_b + m_6 = 1$  кг) подействовал импульс ударной силы

$$F_1 \tau_1 = 650 \text{ Н} \cdot 10^{-2} \text{ с} = 6,5 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

В результате после окончания процесса, т.е. после неупругого удара со скоростью

$$v_k = \frac{(v_{b_2} + v_{6_2})}{2} = 6,5 \text{ м/с},$$

получен импульс

$$mv_k = 1 \text{ кг} \cdot 6,5 \text{ м/с} = 6,5 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Видно, что имеет место равенство

$$F_1 \tau_1 = mv_k.$$

Случайно ли это? Конечно, нет! Ведь силы атмосферного давления действуют здесь отдельно на воду и на бутылку, а в общей системе бутылки с водой они уничтожают друг друга, и остается только внешняя сила.

# Как в землю казан закопали

А. СТАСЕНКО

ПОИСТИНЕ В ФИЗИКЕ МОЖНО найти применение всему. Так, если у вас есть старый казан (полусферическая кастрюля), не выбрасывайте его, а вкопайте в землю. Затем подключите казан к одной из клемм источника напряжения  $U$ , а к другой его клемме подсоедините идеальный длинный провод, который постарайтесь заземлить подальше, желательно на бесконечности (см. рисунок).

Рано или поздно в проводах (отходящем от батареи к казану и подходящем к ней из бесконечности) установится постоянный ток  $I$ . Точно такой же ток должен течь от казана в земле – ведь заряды не создаются и не уничтожаются, причем этот поток зарядов должен быть одинаковым через любую полусферу радиусом  $r$  и, следовательно, площадью  $2\pi r^2$ . Все это следствия закона сохранения заряда. А вот плотность тока (т.е. ток через единицу

площади поверхности) должна уменьшаться по мере удаления от казана (и, следовательно, увеличения поверхности полусферы).

Если считать картину сферически (точнее, полусферически) симметричной, то плотность тока равна

$$j_e = \frac{I}{2\pi r^2}. \quad (1)$$

Но что же вызывает движение зарядов в каждой точке проводящей среды? Конечно, локальное электрическое поле. Причем плотность тока  $\vec{j}_e$  прямо пропорциональна напряженности поля  $\vec{E}$ , а коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом электропроводности*  $\sigma$ :

$$\vec{j}_e = \sigma \vec{E}. \quad (2)$$

Обратная  $\sigma$  величина называется удельным электрическим сопротивле-

нием:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}.$$

Эти коэффициенты очень полезны в электротехнике. Так, если у вас есть кусок проволоки длиной  $l$  с поперечным сечением  $S$  из материала с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ , то его сопротивление  $R$  легко найти по формуле

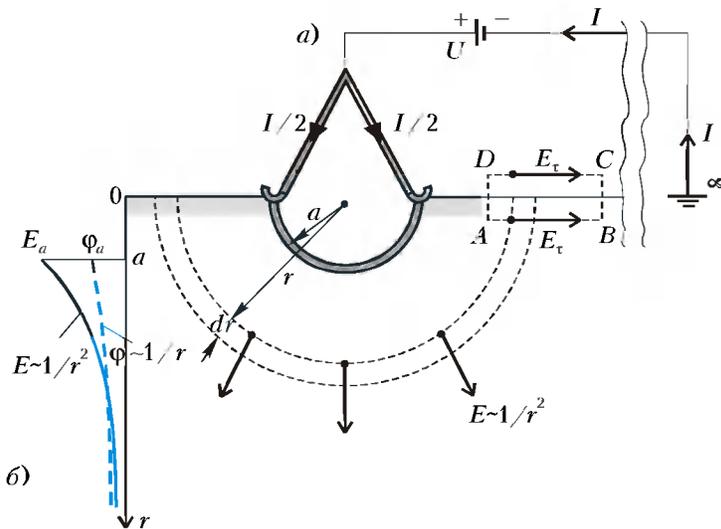
$$R = \frac{l}{S} \rho = \frac{l}{S\sigma}.$$

А эта величина связывает разность потенциалов (напряжение)  $U$ , приложенную к концам проволоки, и постоянный ток, который потечет в ней:

$$U = IR. \quad (3)$$

Но полубесконечное пространство проводящей земли под казаном ( $a \leq r < \infty$ ) вовсе не похоже на кусок проволоки. Как бы найти его суммарное сопротивление?

Вспомним, что напряженность электрического поля есть сила, действующая на единичный заряд. Если этот заряд поле перемещает на расстояние  $dr$ , то оно совершает при этом работу  $E \cdot dr$  (здесь учтено, что в рассматриваемом случае вектор поля  $\vec{E}$  направлен вдоль перемещения  $\vec{dr}$ ). А какая работа необходима для того, чтобы «протолкнуть» через единицу площади



поверхности в единицу времени заряд, численно равный  $j_e$ ? С помощью выражений (1) и (2) получим (в вольтах!)

$$dA = \frac{I}{2\pi r^2 \sigma} dr. \quad (4)$$

Будем считать, что провода и металлический казан – идеальные проводники (не оказывают сопротивления току), а удельная проводимость земли постоянна в пространстве. Тогда вся работа на пути от  $r = a$  (поверхность казана) до  $r \rightarrow \infty$  получится в результате интегрирования выражения (4):

$$A = \frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma a}.$$

Но кто совершает эту работу? Конечно же, источник напряжения:

$$A = U.$$

Сравнивая с (3), получим

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}.$$

Выходит, что суммарное электрическое сопротивление всего полубесконечного пространства с заданным коэффициентом  $\sigma$  зависит только от радиуса казана  $a$ .

Итак, в рассматриваемом случае однородной электропроводящей среды существует радиальное поле с напряженностью  $E$ ;  $1/r^2$  (как бы от точечного заряда, помещенного в центре казана) и постоянный ток с плотностью  $j_e$ ;  $1/r^2$  ( $a \leq r < \infty$ ). Движение зарядов вызывается разностью потенциалов  $U = \phi_a - \phi_{\infty}$ . Но что такое потенциал в точке  $r$ ? Он тесно связан с работой поля по перемещению единичного заряда, которую мы уже упоминали выше:

$$d\phi = -dA = -Edr. \quad (5)$$

Значит,

$$E = -\frac{d\phi}{dr}.$$

Отсюда легко найти радиальную зависимость потенциала:

$$\begin{aligned} \phi(r) - \phi_a &= -\int_a^r E dr = \\ &= -\frac{I}{2\pi\sigma} \int_a^r \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Проверим так называемые граничные условия: при  $r = a$  получаем  $\phi(r) = \phi_a$ ; при  $r \rightarrow \infty$  имеем  $\phi_{\infty} - \phi_a = -\frac{I}{2\pi\sigma a} = -U$ . Таким образом, формулу (6) можно записать также в виде

$$\frac{\phi(r) - \phi_{\infty}}{\phi_a - \phi_{\infty}} = \frac{a}{r}. \quad (7)$$

Понятно также, зачем взят знак «минус» в формуле (5) – чтобы радиальная зависимость потенциала имела вид горки (см. рис. б), по склону которой положительные заряды «скатываются» в область меньших значений  $\phi$  (как санки с ледяной горы). Кстати, теперь легко объяснить, почему от упавшего на землю высоковольтного провода нужно уходить очень мелким шагом: ведь вблизи него потенциал резко меняется с расстоянием, и при обычном шаге между ногами может возникнуть очень большая разность потенциалов – так называемое шаговое напряжение.

Отметим, что в «новых» терминах соотношение (2) примет вид

$$j_e = -\sigma \frac{d\phi}{dr}. \quad (8)$$

Но что творится над землей? Если считать, что воздух не проводит элек-

тричество, т.е. положить  $\sigma = 0$ , то в воздухе не будет и электрического тока:  $j_e = 0$ . А электрическое поле? Рассмотрим прямоугольный контур ABCD (см. рис. а), верхняя сторона которого расположена над землей, нижняя – в земле, а боковые стороны очень (ну, очень!) малы. Если протащить некоторый заряд по этому (замкнутому) контуру (например, в указанном порядке расположения букв), то суммарная работа обязана равняться нулю – ведь в этом контуре нет никаких источников тока, а электростатическое поле потенциально. Это значит, что если поле существует в земле, то оно обязано быть и в воздухе около земли. Более того, тангенциальная (касательная) составляющая этого поля  $E_t$  вне земли (направленная вдоль стороны DC) должна в точности равняться тангенциальной составляющей поля в земле (направленной вдоль стороны AB). Заметим, что здесь ничего не сказано о нормальной составляющей электростатического поля на поверхности земли. Она может существовать, может испытывать скачок на поверхностных зарядах (так же, как нормальная – радиальная – составляющая поля терпит разрыв на зарядах, расположившихся на поверхности казана). Поэтому у поверхности раздела воздух – земля линии напряженности электростатического поля могут быть искривлены.

А что если взять два казана, сложить их в виде сферы и закопать поглубже – тогда, может быть, электрическое поле станет совсем сферически симметричным? Ну хотя бы в некоторой окрестности этого Двухказанья, еще далеко от поверхности? Но и тут вопрос: а провод, подводящий ток, – не нарушает ли он эту прекрасную симметрию? Вот и подумайте. Секрет развития науки в том и состоит, что, ответив на один вопрос, она ставит другие.

Теперь подойдем к казану с другой точки зрения. Представим себе, что он наполнен кипятком, температура которого  $T_a$  поддерживается постоянной. Тогда в окружающей почве установится стационарное распределение температуры, и тепловая энергия будет постоянно «течь» от казана на бесконечность, где температура равна  $T_{\infty}$ . Иначе говоря, поток тепловой энергии между казаном и бесконечностью обеспечивается разностью температур  $T_a - T_{\infty}$ . Значит, по аналогии с электричеством, температуру можно назвать потенциалом, а плотность теплового потока  $j_T$  выразить соотно-

шением типа (8):

$$j_T = -\lambda \frac{dT}{dr}, \quad (9)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности среды.

И это еще не все. Представим себе, что казан «равномерно дырявый», и некий добрый человек поддерживает в нем постоянный уровень супа. Тогда содержимое казана плотностью  $\rho_{\text{супа}}$  будет диффундировать через почву, и рано или поздно установится стационарное распределение этого вещества в пространстве. Ясно, что около казана почва плотностью  $\rho$  будет больше насыщена супом, а чем дальше – тем меньше. Тут уместно ввести понятие массовой доли диффундирующего вещества  $C = \rho_{\text{супа}}/\rho$ . Будем считать, что эта величина всюду много меньше единицы («слабый раствор»), хотя и меняется в пространстве. Тогда, по аналогии с двумя ранее рассмотренными случаями, можно сказать, что поток диффундирующего вещества обеспечивается разностью потенциалов  $C_a - C_\infty$ , а в каждой его точке плотность потока  $j_m$  выражается соотношением типа (8) и (9):

$$j_m = -D \frac{dC}{dr}, \quad (10)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии (или, если угодно, *массопроводности*) среды.

И вот теперь – самое замечательное. Все рассмотренные распределения так называемых потенциалов можно записать совершенно одинаково (!):

$$\frac{\varphi(r) - \varphi_\infty}{\varphi_a - \varphi_\infty} = \frac{T(r) - T_\infty}{T_a - T_\infty} = \frac{C(r) - C_\infty}{C_a - C_\infty} = \frac{a}{r}. \quad (11)$$

И суммарные потоки соответствующей физической субстанции – заряда  $I$ , тепловой энергии  $Q_T$ , массы  $Q_m$  – тоже можно записать одинаково:

$$I = \frac{1}{R}(\varphi_a - \varphi_\infty),$$

$$Q_T = \frac{1}{R_T}(T_a - T_\infty),$$

$$Q_m = \frac{1}{R_m}(C_a - C_\infty),$$

где видны уже знакомое суммарное сопротивление электрическому току

$$R = \frac{1}{2\pi a \sigma},$$

а также сопротивления потоку тепла и массы

$$R_T = \frac{1}{2\pi a \lambda} \text{ и } R_m = \frac{1}{2\pi a D}.$$

А какая из всего этого польза? Очень большая. Например, вы хотите узнать

распределение температуры или концентрации вещества в гораздо более сложной ситуации, чем рассмотренная нами (достаточно симметричная). Скажем, в случае слоистой земли, в которой встречаются к тому же полости, валуны и другие неоднородности. Тогда, пользуясь *электро-тепло-массовой аналогией*, рассмотренной нами, можно распределение температуры или концентрации смоделировать распределением электрического потенциала в среде с таким же распределением коэффициента электропроводности, как и пространственные распределения коэффициентов теплопроводности или диффузии (массопроводности). Измерение токов и разностей потенциалов – более простая проблема, чем измерение температур и концентраций, да и установление электрических полей происходит быстрее. И такое экспериментальное оборудование можно собрать «на столе». Подобные «аналоговые» установки использовались в прикладной физике до развития мощной вычислительной техники. Но и с ее развитием аналогии физических процессов не потеряли смысла – только теперь они понимаются как *одинаковость уравнений и их решений при одинаковых граничных условиях*. Лучше всего эту мысль иллюстрирует цепочка равенств (11).

Итак, если у вас есть старый котел или казан – не выбрасывайте, а ... подумайте о физике.

# Изотопные источники энергии

О.ЕГОРОВ

ОДНИМ ИЗ КРИТЕРИЕВ УЛУЧШЕНИЯ условий жизни человека является количество электроэнергии, которое он потребляет. Большая часть электроэнергии, вырабатываемой сейчас, получается из невозобновляемых источников: угля, нефти, газа. Выработка электроэнергии на атомных электростанциях также требует затрат невозобновляемых ресурсов, в частности

*Эта заметка является авторским вариантом статьи, опубликованной в научно-популярном журнале «Электричество и жизнь» (№3, 2000 г.).*

сти урана-235. В процессе работы реакторов на этом топливе идет захват тепловых нейтронов ядрами урана-238, при этом «нарабатывается» плутоний-239 и множество других радиоизотопов. Само название «радиоизотопы» означает, что эти вещества радиоактивны, т.е. распадаются с выделением  $\alpha$ -частиц, электронов или  $\gamma$ -квантов; при этом выделяется энергия, которую также хотелось бы использовать.

В этой заметке мы рассмотрим некоторые радиоизотопные источники

электроэнергии, нашедшие широкое и разнообразное применение в самых разных сферах жизнедеятельности человека.

В настоящее время накоплено огромное количество радиоактивных изотопов. При их распаде выделяется тепловая энергия, которую при желании можно преобразовать в электрическую. Тепловая энергия – это конечный продукт торможения в веществе частиц, образующихся при радиоактивных распадах. Первоначально такие источники получили распространение в космосе в обитаемых кораблях, поскольку не надо было беспокоиться о радиационной защите. В дальнейшем они нашли применение и в иных областях человеческой деятельности, где использование других источников энергии либо невозможно, либо совершенно нерентабельно.

В 1999 году исполнилось 40 лет со времени разработки первого в мире

(Окончание см. на с. 34)

*Равные тяжести на равных длинах уравниваются, на неравных же длинах не уравниваются, на перевешивают тяжести на большей длине.*

**Архимед**

*Данная сила уравнивается другою, если произведение первой силы на ее возможное перемещение равно произведению другой силы на возможное перемещение этой второй силы.*

**Симон Стевин**

*Равновесие получается в результате уничтожения нескольких сил, которые борются и взаимно сводят на нет действие, производимое ими друг на друга; статика имеет своей целью дать законы, согласно которым происходит это уничтожение.*

**Жозеф Луи Лагранж**

*В процессах... легко узнать восстановление равновесия тепларада, его переход от тела более или менее нагретого к телу более холодному.*

**Сади Карно**

*Исходным пунктом для меня была... устойчивость материи, которая, с точки зрения прежней физики, предстает подлинным чудом.*

**Нильс Бор**

*Ядра урана, которое мы предполагаем шараобразным, сплюсчивается от удара нейтрона, и форма ядра испытывает периодические изменения, в результате чего оно становится менее устойчивым и иногда совсем выходит из равновесия...*

**Энрико Ферми**

## А так ли хорошо знакомы вам? равновесие и устойчивость?

Эти два понятия не раз встречались в предыдущих выпусках «Калейдоскопа», но еще не были его «главными героями». Теперь, сведенные вместе, они призваны продемонстрировать, насколько важно выявление условий и характера самых разных состояний равновесия. Возникнув в статике и гидростатике, эта проблема со временем проявилась во всех областях физики. Разве не об этом свидетельствует появление таких терминов, как «динамическое равновесие» и «неравновесный газ», «гидродинамическая неустойчивость» и «равновесное излучение», «устойчивая орбита» и «стабильный изотоп»?

Более того, понятия-ветераны постоянно расширяли сферу своего «влияния», давно уже выйдя за рамки решений чисто физических или инженерных задач. Так, химию интересуют условия протекания колебательных реакций; биологию волнуют проблемы устойчивого существования сложных органических соединений; в математике возникла теория катастроф, исследующая конструктивную роль неустойчивых процессов; появилась молодая наука — синергетика, занимающаяся изучением упорядоченных структур, рождающихся в неустойчивых системах. Таким образом, неравновесные состояния и различного вида

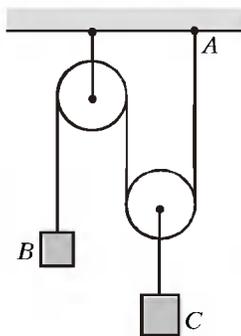
неустойчивости, приводящие к образованию качественно новых объектов и явлений, *устойчиво* привлекают внимание и силы современных исследователей.

Мы же пока обратимся к более простым, близким к школьным, ситуациям, связанным с равновесием и устойчивостью. Возможно, они вызовут у вас интерес — а ведь это самое что ни на есть *неравно*весное (в хорошем смысле слова!) состояние.

### Вопросы и задачи

1. Почему значительно легче удерживать на пальце половую щетку, перевернутую «вверх ногами», чем палку той же длины?

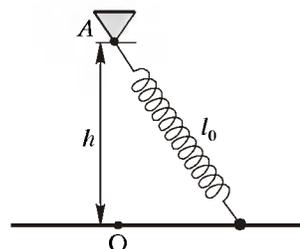
2. Система из подвижного и неподвижного блоков находится в равновесии. Сохранится ли оно, если точку закрепления каната *A* сместить вправо?



3. Каков характер равновесия шарика, находящегося на поверхности, изображенной на рисунке?



4. Бусинка, способная двигаться по гладкой горизонтальной спице, соединена с пружиной длиной  $l_0$ , закрепленной другим концом в точке *A*, отстоящей от спицы на  $h$ . Каковы положения равновесия бусинки?



5. Для чего к воздушному змею приделывают хвост?

6. Почему доска обычно плавает в воде широкой гранью горизонтально, а не вертикально, хотя оба положения доски равновесные?

7. Может ли корабль устойчиво плавать на водной поверхности, если его центр тяжести лежит выше центра вытесненной им воды (центра давлений)?

8. Почему пузырьки газа в воде имеют форму шара?

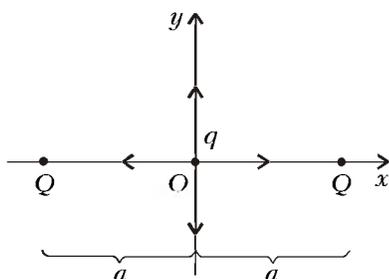
9. Отчего струя воды, вытекающая

щая из водопроводного крана или пипетки, распадается на отдельные капли?

10. Почему сливаются вместе две или несколько коснувшихся друг друга капель?

11. Равны ли между собой температуры жидкости и ее насыщенного пара – ведь при испарении из жидкости вылетают наиболее «энергичные» молекулы?

12. Точечный заряд  $q$  может двигаться по двум перпендикулярным прямым  $x$  и  $y$  между двумя одинаковыми точечными зарядами  $Q$ , как показано на рисунке. Будет ли точка  $O$  положением равновесия заряда  $q$ ?



13. Почему  $\alpha$ -частицы самопроизвольно вылетают из радиоактивных ядер?

14. Все ли виды радиоактивности изменяют химические свойства вещества?

### Микроопыт

Погрузите в мыльный раствор проволочное кольцо, по диаметру которого предварительно расположите нитку с петлей посередине. Затем осторожно проколите мыльную пленку внутри петли. Какую фигуру образует при этом нить? Почему?

### Любопытно, что...

...в своем знаменитом сочинении «О плавающих телах» Архимед рассматривал не только условия плавания, но и вопрос об устойчивости равновесия плавающих тел различной геометрической формы.

...законы гидростатики, установленные Архимедом, не были оценены по достоинству, и их пришлось «открывать» заново. В конце XVI века голландский ученый Стевин при изучении равновесия тяжелой жидкости ввел новый принцип – принцип отвердения, с помощью которого получил изящное доказательство закона Архимеда, вошедшее в учебники.

...в 1788 году французский математик и механик Лагранж доказал теорему, определяющую достаточность условия устойчивого равновесия системы тел через минимум потенциальной энергии. В том же году увидела свет его «Аналитическая механика», ставшая триумфом чистого анализа. В предисловии к ней Лагранж подчеркнул: «В этой работе вовсе нет чертежей, а только алгебраические операции».

...в некоторых задачах теории упругости вопросы устойчивости приобретают принципиальное значение. Например, тонкие оболочки при слишком большой нагрузке внезапно, «хлопком», выгибаются, что говорит о переходе устойчивого равновесия в неустойчивое.

...состояние ровной поверхности моря, когда над ней равномерно дует ветер, оказывается неустойчивым. Случайно появившиеся на поверхности малые возмущения – гребни и впадины – имеют тенденцию со временем нарастать.

...если в некотором слое морской воды ее плотность заметно возрастает по глубине, то возникает эффект «жидкого грунта», когда подводная лодка, находясь в этом слое, может продолжать долгое время сохранять равновесие.

...помимо первого, второго и третьего начал (законов), термодинамика содержит и так называемое нулевое начало: «для каждой термодинамической системы существует состояние термодинамического равновесия, которого она достигает самопроизвольно при фиксированных внешних условиях».

...минимум энергии взаимодействия молекул, составляющих твердое тело, достигается при их строго периодическом расположении. Иными словами, устойчивому равновесию твердого тела соответствует его кристаллическое состояние.

...условия равновесия трех фаз вещества – твердой, жидкой и газообразной – могут выполняться только в одной, так называемой тройной, точке. Так, тройной точке воды соответствуют температура 273,16 К и давление 609 Па.

...электрический заряд, находящийся под действием лишь электростатических сил, не может находиться в устойчивом равновесии, если рассматривать перемещения

по всем направлениям (теорема Ирншоу).

...для сохранения устойчивости движения заряженных частиц, разгоняемых в ускорителях, создают специальные конфигурации магнитного поля, стремящегося вернуть частицы на расчетную орбиту при малейшем ее возмущении.

...стабильные круговые орбиты, характерные для планет Солнечной системы, – явление весьма редкое для космоса. Из-за начальной хаотичности любой планетной системы, т.е. резкой зависимости ее будущего от начальных условий, такой конечный результат требует исключительного сочетания исходных обстоятельств.

...когда доля нейтронов в атомном ядре становится слишком большой, «избыточному» нейтрону энергетически выгодно превратиться в протон, после чего пропорция частиц в ядре оказывается более устойчивой. При этом из ядра вылетает электрон, т.е. происходит  $\beta$ -распад.

...если бы ядро бериллия – промежуточного участника термоядерного синтеза углерода из трех ядер атомов гелия – было устойчивым, углерод в звездах синтезировался бы иным путем, причем гораздо быстрее. Звезды практически взрывались бы, вместо того чтобы светить миллиарды лет.

### Что читать в «Кванте» о равновесии и устойчивости (публикации последних лет)

1. «Гармонические колебания и равновесие» – 1996, Приложение №4, с.82;
2. «Капельная модель ядра» – 1996, Приложение №4, с.123;
3. «И Эдисон похвалил бы вас...» – 1997, №2, с.14;
4. «Планетарная модель атома и теория Бора» – 1997, №2, с.18;
5. «Гидродинамические парадоксы» – 1998, №1, с.5;
6. «Физика рулетки» – 1998, №2, с.16;
7. «Такие простые качели» – 1999, №1, с.30;
8. Калейдоскоп «Кванта» – 1999, №3, с.32; №5, с.32;
9. «Качающаяся скала» – 2000, №2, с.6;
10. «Почему кувыркается книга?» – 2000, №3, с.37.

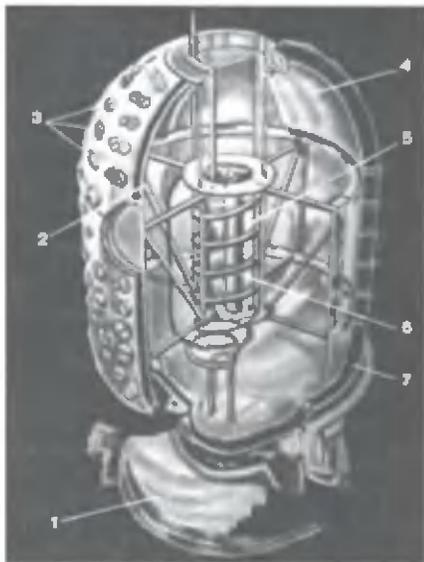
Материал подготовил  
А.Леонович

(Начало см. на с. 31)

изотопного источника электроэнергии. Тогда в рамках проекта «Орион» комиссия по атомной энергии США приняла решение создать целую серию ядерных вспомогательных источников энергии – сокращенно SNAP. В соответствии с этой программой, в США приступили к разработке устройств, в которых электроэнергия получается при использовании тепла – либо выделяемого при радиоактивном распаде изотопов, либо вырабатываемого при делении ядер урана в небольших ядерных реакторах (таким источником тока присваивались нечетные номера).

Исторически первым был разработан термоэлектрический генератор SNAP-1A мощностью 125 Вт с ртутной защитой. Работы над установкой были закончены в 1960 году после испытания модели с электрическим подогревом. На рисунке хорошо видны таблетки изотопа церия  $^{144}\text{Ce}$ , при радиоактивном распаде которого выделяется тепло, и змеевик охлаждения. Все это находится в пространстве, заполненном ртутью. На поверхности изолирующего покрытия расположены термоэлектрические преобразователи.

Примерно тогда же (в 1959 году) был создан изотопный термоэлектрический преобразователь SNAP-3, предназначенный для проверки основных принципов работы таких устройств. Этот преобразователь был загружен изотопом полония  $^{210}\text{Po}$ . Он имел на-



Источник SNAP-1A. Здесь 1 – тепловая изоляция, 2 – тепловые экраны, 3 – термоэлектрические преобразователи, 4 – пространство, заполненное ртутью, 5 – таблетки церия, 6 – охлаждающий змеевик, 7 – изоляция

чальную мощность 3 Вт и проработал долгие годы.

Радиоизотопные преобразователи типа SNAP-3, загруженные изотопом плутония  $^{238}\text{Pu}$ , имели мощность 2,7 Вт и массу 1,84 кг (2,5 кг вместе с термоэлектрическим преобразователем). Малые размеры (11,875 × 12,25 см) и относительно небольшая масса позволили использовать их в космосе, в частности как вспомогательные источники электроэнергии в спутниках серии «Транзит-4А» и «Транзит-4Б», запускаемых с 1961 года. Плутоний-238 имеет период полураспада 89 лет, так что преобразователь обеспечивал указанную мощность по крайней мере в течение 5 лет. Следует отметить, что спутник «Транзит-4А» с радиоизотопным источником, запущенный 28 июня 1961 года, – первый случай использования атомной энергии в космосе. Заметим также, что в плутонии-238, в отличие от плутония-239, не может поддерживаться цепная ядерная реакция, а значит, при использовании этого изотопа исключена опасность ядерного взрыва.

Серия радиоизотопных источников типа SNAP-7 с загрузкой изотопом стронция  $^{90}\text{Sr}$  предназначалась уже для использования на земле. Так, SNAP-7A мощностью 5 Вт и SNAP-7B мощностью 30 Вт использовались в качестве источников энергии для навигационных маяков, а источники SNAP-7C мощностью 5 Вт и SNAP-7D мощностью 30 Вт – в автоматических метеостанциях, расположенных в удаленных районах.

Источник SNAP-9A мощностью 25 Вт был разработан для установки на спутнике «Транзит-5». Используемый в нем радиоизотоп плутония  $^{238}\text{Pu}$  обеспечивал надежную работу в космосе в течение 6 лет.

Термоэлектрический генератор SNAP-11 был предназначен для использования при мягкой посадке на Луну. Загруженный в него радиоизотоп кюрия  $^{242}\text{Cm}$  обеспечивал мощность 21–25 Вт в течение 120 дней.

Можно сказать, что использование радиоизотопных источников тока вместо химических позволило в десятки и даже сотни раз увеличить длительность пребывания спутников на орбите. Однако при использовании спутников с большим энергопотреблением мощности радиоизотопных генераторов оказывается недостаточно. При энергопотреблении более 500 Вт, по анализу американской комиссии по использованию атомной энергии, более рентабельно использовать ядер-

ные реакции деления, т.е. маленькие атомные станции.

Сделаем теперь несколько численных оценок.

Мы видели, что радиоизотопные преобразователи SNAP-3 загружаются изотопами полония  $^{210}\text{Po}$  (период полураспада 0,38 года) или плутония  $^{238}\text{Pu}$  (период полураспада 89 лет). Оценим количество радиоизотопа  $^{238}\text{Pu}$ , необходимого для обеспечения такой же тепловой мощности, как и при загрузке  $^{210}\text{Po}$ , если тепловая мощность преобразователя 60 Вт, а масса изотопа полония 0,38 г.

Воспользуемся законом радиоактивного распада. Оба изотопа испускают только  $\alpha$ -частицы. Для грубой оценки можно составить пропорцию: чем меньше период полураспада, тем больше удельная активность препарата. И если период полураспада изотопа плутония в 234 раза больше периода полураспада изотопа полония, то и масса изотопа плутония, необходимая для создания той же тепловой мощности, должна быть приблизительно в 234 раза больше массы изотопа полония.

Отсюда возникают и особенности применения различных радиоизотопов. Так, если вам нужен источник на короткое время, например в космическом полете, то лучше взять короткоживущий изотоп, масса которого, необходимая для создания нужной тепловой мощности, просто ничтожна. Для использования же таких источников на земле масса загружаемого изотопа ничем не лимитируется, кроме повышения радиоактивного фона вблизи источника. (При толщине стенок контейнера порядка одного сантиметра контейнер полностью поглощает все альфа-частицы. Скажем больше – кожа человека также полностью задерживает эти частицы.)

Оценим теперь активность используемых радиоактивных источников. Зная массу и период полураспада изотопа  $^{210}\text{Po}$ , найдем его активность и выразим ее в кюри (1 кюри =  $3,7 \cdot 10^{10}$  распадов в секунду), если энергия испускаемых  $\alpha$ -частиц равна 5,3 МэВ.

Зная молярную массу изотопа полония и число Авогадро, легко сосчитать, что в 0,38 г изотопа содержится  $1,1 \cdot 10^{21}$  атомов полония. За 0,38 года распадается половина этого количества, а за одну секунду происходит, соответственно,  $4 \cdot 10^{13}$  распадов. Значит, активность препарата составляет 1100 кюри. (Для сравнения напомним, что в Чернобыле активность выбросов была на 4 порядка больше.)

# Девятнадцать доказательств теоремы Евклида

А.ЭВНИН

СУЩЕСТВУЮТ ТЕОРЕМЫ, КОТОРЫЕ обладают удивительной привлекательностью: математики не устают в течение многих лет находить все новые и новые их доказательства.

Известно более 350 различных доказательств теоремы Пифагора. Многие из них собраны в книге [1], в предисловии к которой ее автор пишет: «Мы хотели показать на простом примере, впрочем имеющем выдающееся значение как с точки зрения истории математики, так и ее преподавания, как разнообразно могут соприкасаться разные области математики, как тесно бывают сплетены математические факты, образуя не цепь, но сеть».

Эти слова в полной мере описывают и цель данной статьи, посвященной теореме, которая моложе теоремы Пифагора на 200 лет и была сформулирована и доказана древнегреческим математиком Евклидом в его знаменитой книге «Начала».

**Теорема.** Множество простых чисел бесконечно.

Мы приглашаем читателя познакомиться с коллекцией доказательств теоремы Евклида. Большинство из них вполне элементарны. Для понимания некоторых требуется знание начальных понятий теории числовых рядов. Для того чтобы разобраться в топологическом доказательстве, разумеется, нужно знать определение топологического пространства.

Основными источниками при написании статьи послужили книги [3], [4], [5], а также страница в Интернете [7].

Начнем с классического (авторского!) доказательства.

**1 (Евклид, III в. до н.э.).** Предположим, что множество простых чисел конечно и  $p$  – самое большое простое число. Рассмотрим число  $k$ , которое больше произведения всех простых

чисел на единицу:

$$k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1.$$

Число  $k$  не имеет простых делителей, так как при делении на любое простое число дает в остатке 1. Между тем, легко проверить, что наименьший делитель  $m > 1$  натурального числа  $k$ , большего 1, является простым числом. Полученное противоречие доказывает теорему.  $\textcircled{B}$

**2 (Куммер).** Суть доказательства Евклида состоит в том, что в предположении конечности множества простых чисел строится некоторое число  $k$ , которое не делится ни на одно из простых чисел. Немецкий математик Куммер поменял в рассуждении Евклида лишь один знак, определив число  $k$  так:

$$k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p - 1.$$

## От взаимно простых чисел к простым

Доказательства, собранные в этом разделе, опираются на следующую простую лемму.

**Лемма 1.** Если существует бесконечная последовательность попарно взаимно простых чисел, то множество простых чисел бесконечно.

Действительно, у взаимно простых чисел нет общих простых делителей. Поэтому, взяв по одному простому делителю членов упомянутой последовательности, мы получим некоторое бесконечное множество, все элементы которого суть простые числа.  $\textcircled{B}$

Теперь дело за тем, чтобы найти бесконечные последовательности попарно взаимно простых чисел.

**3 (Сильвестр).** Рассмотрим последовательность  $(a_n)$ , определяемую соотношениями  $a_1 = 2$ ,  $a_{k+1} = a_k^2 - a_k + 1$ ,  $k \in \mathbf{N}$ . Вот первые несколько членов этой последовательности: 2, 3, 7, 43. Докажем по индукции, что для

любого  $n \in \mathbf{N}$  имеет место равенство

$$a_{n+1} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n + 1. \quad (1)$$

База индукции тривиальна.

*Индукционный шаг.* Соотношение  $a_{k+2} = a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} + 1 = a_{k+1}^2 - a_{k+1} + 1$  равносильно тому, что  $a_1 a_2 \dots a_k = a_{k+1} - 1$ .

Из (1) следует, что каждый член последовательности Сильвестра взаимно прост со всеми предыдущими.  $\textcircled{B}$

**4 (Гольдбах).** Пусть  $a_n = 2^{2^n} + 1$ . Докажем, что любые два числа последовательности

$$3, 5, 17, \dots, 2^{2^n} + 1, \dots$$

взаимно просты.<sup>1</sup> Ведя доказательство от противного, предположим, что числа  $a_n$  и  $a_k$ , где  $n > k$ , не являются взаимно простыми, т.е. имеют некоторый общий множитель  $d > 1$ . Заметим, что рассматриваемая последовательность состоит из нечетных чисел, поэтому  $d > 2$ . Применим теперь легко проверяемое тождество

$$(1+2)(1+2^2)\left(1+2^{2^2}\right) \times \\ \times \left(1+2^{2^3}\right) \dots \left(1+2^{2^{n-1}}\right) = 2^{2^n} - 1.$$

Оно показывает, что число  $a_n - 2 = 2^{2^n} - 1$  делится на  $a_k$ , а заодно и на  $d$ . Тогда и  $2 = a_n - (a_n - 2)$  делится на  $d$ , что невозможно.  $\textcircled{B}$

**5.** Укажем общую конструкцию, частными случаями которой являются последовательности из двух предыдущих доказательств.

Пусть  $a$  и  $b$  – взаимно простые числа. Определим последовательность  $(a_n)$  следующим образом:  $a_1 = a$ ,  $a_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_k + b$ . Отметим, что последовательности из двух предыдущих доказательств получаются при  $a = 2$ ,  $b = 1$  и  $a = 1$ ,  $b = 2$  соответственно.

Докажем, что любые два элемента последовательности  $(a_n)$  – взаимно простые числа. Заметим сначала, что при  $n > k$  число  $a_n - b = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$  делится на  $a_k$  (обозначают:  $a_n - b : a_k$ ). Пусть  $d$  – общий делитель чисел  $a_n$  и  $a_k$ . Из того, что  $a_n : d$  и  $a_n - b : a_k : d$ , следует  $b : d$ .

<sup>1</sup> Числа данной последовательности называются числами Ферма, который заметил, что эти числа при  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  являются простыми, и предположил, что то же будет верно для любого значения  $n$ , в чем сильно ошибся: уже  $a_5$  – составное число. Более того, в настоящее время неизвестно ни одно число Ферма при  $n > 4$ , являющееся простым.

Вновь применим индукцию. База ее очевидна.

Предположим, что  $a_1, a_2, \dots, a_k$  – попарно взаимно простые числа. Пусть  $d > 1$  – произвольный делитель числа  $a_{k+1}$ . Докажем, что  $d$  не является делителем чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Рассуждая от противного, обозначим через  $i$  наименьшее число, для которого  $a_i : d$ . Если  $i > 1$ , то  $a_i = a_1 a_2 \dots a_{i-1} + b : d$  и, поскольку  $b : d$ , произведение  $a_1 a_2 \dots a_{i-1}$  также делится на  $d$ , что противоречит взаимной простоте числа  $a_i$  с предшествующими членами последовательности. Если же  $i = 1$ , то  $a_1 = a$  делится на  $d$ , что вновь приводит к противоречию ( $a$  и  $b$  – взаимно простые числа).  $\textcircled{B}$

**6.** Обобщить конструкцию Сильвестра можно и по-другому. Пусть  $a_1 = a \geq 2$ ,  $a_{k+1} = 1 + a_k(a_k - 1)b_k$ , где  $(b_n)$  – произвольная последовательность натуральных чисел. Заметим, что последовательность Сильвестра получается, если положить  $a = 2$ ,  $b_n = 1$ .

Одна из задач XII Всесоюзной олимпиады в 1978 году была следующей:

Пусть  $f(x) = x^3 - x + 1$ ,  $a > 1$  – натуральное число. Докажите, что числа бесконечной последовательности  $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$  попарно взаимно просты.

Нетрудно видеть, что если в нашей конструкции взять  $b_k = a_k + 1$ , то возникнет указанная последовательность.

Докажем, что последовательность  $(a_n)$  состоит из попарно взаимно простых чисел. Действительно, если  $m > k$ , то

$$a_m - 1 : a_{m-1} - 1 : a_{m-2} - 1 : \dots : a_{k+1} - 1 : a_k,$$

откуда  $a_m \equiv 1 \pmod{a_k}$ , т.е.  $a_m$  и  $a_k$  – взаимно простые числа.  $\textcircled{B}$

Для дальнейшего нам понадобится следующий результат.

**Лемма 2.** Пусть  $k > 1$ ,  $a, b$  – натуральные числа. Тогда

$$(k^a - 1, k^b - 1) = k^{(a,b)} - 1,$$

где  $(x, y)$  обозначает наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ .

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда  $a$  кратно  $b$ . Тогда для некоторого  $q$  имеем  $a = bq$  и  $(a, b) = b$ . Доказываемое равенство приобретает вид  $(k^a - 1, k^b - 1) = k^b - 1$  и равносильно тому, что  $k^a - 1$  кратно

<sup>2</sup> О сравнениях, малой теореме Ферма и функции Эйлера, которые встретятся читателю в этой статье, подробно рассказано в статье В. Сендерова и А. Спивака «Малая теорема Ферма» («Квант» №1, 3, 4 за 2000 г.).

$k^b - 1$ . Последнее утверждение легко доказать:  $k^a - 1 = k^{bq} - 1 = (k^b)^q - 1$  делится на  $k^b - 1$ .

Пусть теперь  $a$  не делится на  $b$ , т.е.  $a = bq + r$ ,  $0 < r < b$ . Имеем:  $k^a - 1 = k^{bq+r} - 1 = k^r(k^{bq} - 1) + k^r - 1$ . Как показано выше,  $k^{bq} - 1$  делится на  $k^b - 1$ . Кроме того,  $0 < k^r - 1 < k^b - 1$ . Таким образом, остаток от деления  $k^a - 1$  на  $k^b - 1$  равен  $k^r - 1$ . Поэтому  $(k^a - 1, k^b - 1) = (k^b - 1, k^r - 1)$ . Используя соотношения алгоритма Евклида  $a = bq_0 + r_1$ ,  $b = r_1q_1 + r_2$ ,  $r_1 = r_2q_2 + r_3, \dots, r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$ ,  $r_{n-1} = q_n r_n$ , получаем цепочку равенств  $(k^a - 1, k^b - 1) = (k^b - 1, k^{r_1} - 1) = (k^{r_1} - 1, k^{r_2} - 1) = \dots = (k^{r_n} - 1, k^{r_n} - 1) = k^{r_n} - 1 = k^{(a,b)} - 1$ . Сопоставляя начало и конец этой цепочки, получаем требуемое.

**Следствие.** Если  $m$  и  $n$  взаимно просты, то взаимно простыми будут и числа  $2^m - 1$  и  $2^n - 1$ .

Действительно, если  $(m, n) = 1$ , то  $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1 = 2^1 - 1 = 1$ .

$\textcircled{B}$

**7 (Холщинский, 1994).** Предположим, что  $F = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  – множество всех простых чисел ( $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5, \dots$ ). Очевидно, что числа из  $F$  попарно взаимно просты; в силу следствия леммы 2 при  $i \neq j$  числа  $2^{n_i} - 1$  и  $2^{n_j} - 1$  также взаимно просты. Выберем теперь для каждого  $i = 1, 2, \dots, k$  какой-нибудь простой делитель  $p_i$  числа  $2^{n_i} - 1$ ; числа  $p_1, p_2, \dots, p_k$  будут попарно различны. В результате образуется множество  $G = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  простых чисел ( $p_1 = 3, p_2 = 7, p_3 = 31, \dots$ ). Все элементы  $G$  суть нечетные числа. Поскольку множества  $F$  и  $G$  содержат поровну элементов,  $2 \in F$  и  $2 \notin G$ , делаем вывод, что в  $G$  найдется число, не входящее в  $F$ . Пришли к противоречию.  $\textcircled{B}$

**Когда число имеет «много» простых делителей**

Новые доказательства теоремы Евклида можно получить, строя последовательности  $(a_n)$ , для которых число простых делителей  $n$ -го члена последовательности неограниченно возрастает.

**8.** Докажем, что число  $a_n = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$  имеет не менее  $n$  различных простых множителей.

В тождестве  $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)$  положим  $x =$

$= 2^{2^{n-1}}$ . Получим

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 2^{2^n} + 1 = \\ &= \left(2^{2^n} + 1 - 2^{2^{n-1}}\right) \left(2^{2^n} + 1 + 2^{2^{n-1}}\right) = \\ &= \left(2^{2^n} + 1 - 2^{2^{n-1}}\right) a_n. \end{aligned}$$

Таким образом,  $a_{n+1}$  делится на  $a_n$ . Числа  $2^{2^n} - 2^{2^{n-1}} + 1$  и  $a_n = 2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$  взаимно просты, так как если бы у них был общий (нечетный) множитель  $q$ , то их разность  $2^{2^{n-1}}$  делилась бы на  $q$ , что неверно. Значит, при переходе от  $a_n$  к  $a_{n+1}$  число простых делителей увеличивается. Поэтому у  $n$ -го члена рассматриваемой последовательности не менее  $n$  различных простых делителей.  $\textcircled{B}$

**9.** Следующее доказательство возникает в результате рассмотрения представления числа  $n!$  в виде произведения степеней простых чисел:

$$n! = \prod_{p \leq n} p^{f_p}.$$

Как известно, кратность  $f_p$  простого числа  $p$  в каноническом разложении числа  $n!$  определяется так:  $f_p = \sum_{k \geq 1} \lfloor n/p^k \rfloor$ . Отсюда получаем оценку для кратности  $f_p$ :

$$f_p \leq \sum_k \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p-1},$$

из которой следует, что

$$\sqrt[n]{n!} \leq \prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}} \quad (2)$$

(произведение берется по всем простым делителям  $n$ ). Теперь докажем неравенство

$$\sqrt[n]{n!} \geq n/e. \quad (3)$$

Оно равносильно следующему неравенству:

$$\frac{1}{n} (\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n) \geq \ln n - 1.$$

Последнее доказывается суммированием неравенств  $\ln k \geq \int_{k-1}^k \ln x dx$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n) &\geq \frac{1}{n} \int_1^n \ln x dx = \\ &= \frac{1}{n} (x \ln x - x) \Big|_1^n = \frac{1}{n} (n \ln n - n + 1) = \\ &= \ln n - 1 + \frac{1}{n} > \ln n - 1. \end{aligned}$$

Сопоставив неравенства (2) и (3), получим

$$\prod_{p|n} p^{\frac{1}{p-1}} \geq \frac{n}{e}. \quad (4)$$

Если бы множество простых чисел было конечно, то левая часть неравенства (4) не могла бы быть сколько угодно большой вопреки (4). Полученное противоречие доказывает теорему Евклида.  $\textcircled{B}$

**10.** Пусть  $P(x)$  – многочлен с целыми коэффициентами. Назовем число  $k$  делителем многочлена  $P(x)$ , если для некоторого натурального  $n$  число  $P(n)$  делится на  $k$ . Докажем, что среди делителей многочлена  $P(x)$  степени  $\geq 1$  бесконечно много простых чисел.

Предположим, что это не так, и список простых делителей  $P(x)$  исчерпывается числами  $p_1, p_2, \dots, p_s$ .

Пусть  $P(a) = b \neq 0$ . Рассмотрим многочлен  $Q(x) = P(a + bp_1p_2\dots p_s x)/b$ . Поскольку  $P(a + bp_1p_2\dots p_s x) - P(a) : bp_1p_2\dots p_s$ , имеем

$$Q(x) - 1 = \frac{P(a + bp_1p_2\dots p_s x) - P(a)}{b} : bp_1p_2\dots p_s,$$

и значит, числа  $p_1, \dots, p_s$  не являются делителями  $Q(x)$ . Многочлен  $Q(x)$ , как всякий многочлен, отличный от константы, принимает каждое свое значение конечное число раз. Поэтому среди его значений есть числа, не равные 0, 1 и  $-1$ , в силу чего у него есть простые делители. Между тем всякий делитель многочлена  $Q$  является и делителем многочлена  $P$ , так как при  $t = a + bp_1p_2\dots p_s x$  выполняется равенство  $P(t) = bQ(x)$ .

Итак, многочлен  $P(x)$  имеет простой делитель, отличный от  $p_1, \dots, p_s$ . Противоречие.  $\textcircled{B}$

В частности, для всякой арифметической прогрессии  $a_n = a_1 + (n-1)d$ , где  $d \neq 0$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ , совокупность простых делителей ее членов бесконечна.

Знаменитая теорема Дирихле утверждает, что если  $a_1$  и  $d$  – взаимно простые числа, то среди членов арифметической прогрессии с первым членом  $a_1$  и разностью  $d$  содержится бесконечно много простых чисел.<sup>3</sup> В

<sup>3</sup> Интересно отметить, что ни для одного многочлена  $P(x)$  степени больше 1 не доказано, что среди чисел  $P(n)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ , бесконечно много простых ([2], [4]). В то же время многочлен от двух переменных  $ax^2 + bxy + cy^2$ , где  $a, b$  и  $c$  – взаимно простые числа, среди своих значений (при натуральных значениях аргументов) содержит бесконечно много простых чисел ([6]).

следующем разделе мы рассмотрим некоторые простейшие частные случаи этой теоремы.

### Частные случаи теоремы Дирихле

**11.** Существует бесконечно много простых чисел вида  $3n + 2$ .

Пусть это не так и  $p_1 = 2, p_2 = 5, p_3 = 11, \dots, p_s$  – все простые числа указанного вида. Рассмотрим число  $k = 3p_1p_2\dots p_s - 1$ . Очевидно,  $k$  не делится на 3, а также на  $p_1, p_2, \dots, p_s$ . Если бы все его простые делители при делении на 3 давали остаток 1, то тем же свойством обладало бы и число  $k$ , что неверно. Значит, у числа  $k$  есть простой делитель  $q$  вида  $q = 3n + 2$ . Число  $q$  отлично от  $p_1, \dots, p_s$ . Противоречие.  $\textcircled{B}$

Ясно, что если  $3n + 2$  – простое число, то  $n$  нечетно. Поэтому доказанное утверждение равносильно тому, что существует бесконечно много простых чисел вида  $6n + 5$ . Более сложно доказывается такой факт.

**12.** Существует бесконечно много простых чисел вида  $6n + 1$ .

Предварительно убедимся в справедливости следующего утверждения.

**Лемма 3.** Всякий простой делитель  $p > 3$  многочлена  $x^2 + x + 1$  имеет вид  $p = 6n + 1$ .

Действительно, если  $p = 3k + 2$  и  $x^2 + x + 1 : p$ , то  $x^3 \equiv 1(\text{mod } p)$  и  $x$  не делится на  $p$ . Возведя обе части сравнения в степень  $k$ , получим  $x^{p-2} \equiv 1(\text{mod } p)$ . Отсюда  $x^{p-1} \equiv x(\text{mod } p)$ . С другой стороны, по малой теореме Ферма  $x^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$ . Таким образом,  $x \equiv 1(\text{mod } p)$ ,  $x^2 + x + 1 \equiv 3(\text{mod } p)$  и  $p$  делится на 3. Полученное противоречие говорит о том, что простое число  $p$  при делении на 3 дает остаток 1, а значит, имеет вид  $p = 6n + 1$ .  $\textcircled{B}$

Теперь предположим, что  $p_1 = 7, p_2 = 13, \dots, p_s$  – все простые числа вида  $6n + 1$ . Пусть  $m = p_1\dots p_s$  и  $k = m^2 + m + 1$ . Тогда число  $m$  имеет вид  $m = 6r + 1$  и  $k = 36r^2 + 18r + 3 \equiv 3(\text{mod } 9)$ . Число  $k$  нечетно, не является степенью 3, поэтому у него есть простой делитель  $q > 3$ . По лемме 3 для некоторого  $n$  имеем  $q = 6n + 1$ . В то же время число  $q$  отлично от чисел  $p_1, \dots, p_s$ , так как при делении  $k$  на любое число  $p_i$  в остатке будет 1. Противоречие получено.  $\textcircled{B}$

Рассуждения предыдущего пункта допускают обобщение.

**Лемма 4.** Пусть  $m$  и  $p$  – не равные друг другу простые числа. Если  $p$  является делителем числа  $x^{m-1} +$

$+ x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1$ , где  $x \in \mathbf{N}$ , то  $p \equiv 1(\text{mod } m)$ .

**Доказательство.** Пусть  $p = mk + r$ , где  $r = 1, 2, \dots, m-1$ . Нужно доказать, что  $r = 1$ .

Из условия сразу следует:

$$x^m \equiv 1(\text{mod } p), \quad (5)$$

т.е. число  $x$  не делится на  $p$ . Убедимся сначала, что

$$x^{r-1} \equiv 1(\text{mod } p). \quad (6)$$

Если  $p < m$ , то  $p = r$  и (6) выполняется в силу малой теоремы Ферма. Если  $p > m$ , то, возведя обе части сравнения (5) в степень  $k = \frac{p-r}{m}$ , получим

$$x^{p-r} \equiv 1(\text{mod } p). \quad (7)$$

С другой стороны, по малой теореме Ферма

$$x^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p). \quad (8)$$

Вычитая из (8) сравнение (7), получаем, что  $x^{p-r}(x^{r-1} - 1) \equiv 0(\text{mod } p)$ . Отсюда (поскольку  $x$  не делится на  $p$ ) и следует (6).

Доказывая лемму от противного, предположим, что  $r > 1$ . Тогда  $m$  и  $r-1$  взаимно простые числа (так как  $m$  – простое число и  $m \neq r-1$ ). Применим лемму 2:

$$(x^m - 1, x^{r-1} - 1) = x^{(m,r-1)} - 1 = x - 1.$$

Из (5) и (6) следует, что число  $p$  является общим делителем чисел  $x^m - 1$  и  $x^{r-1} - 1$ , значит, и их наибольшего общего делителя  $x - 1$ . Таким образом,  $x \equiv 1(\text{mod } p)$ . Отсюда  $P(x) \equiv m(\text{mod } p)$ , и, так как по условию леммы  $P(x) \equiv 0(\text{mod } p)$ , приходим к выводу:  $m$  делится на  $p$ , что противоречит условию. Значит,  $r = 1$ .  $\textcircled{B}$

**13.** Существует бесконечно много простых чисел вида  $tn + 1$ , где  $t$  – простое число.

**Доказательство.** Введем в рассмотрение многочлен

$$P(x) = x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x^2 + x + 1.$$

Пусть  $p_1, p_2, \dots, p_s$  – все простые числа вида  $tn + 1$ . Определим число  $k$  равенством  $k = P(p_1p_2\dots p_s)$ . По лемме 4 всякий простой делитель  $q$  числа  $k$  имеет вид  $q = tn + 1$ . В то же время число  $q$  отлично от чисел  $p_1, \dots, p_s$ , так как при делении  $k$  на любое число  $p_i$  в остатке будет 1. Противоречие получено.  $\textcircled{B}$

**Комбинаторные доказательства**

14. Пусть  $2^n > (1+n)^m$ . Докажем, что среди чисел  $1, 2, 3, \dots, 2^n$  существует по крайней мере  $m+1$  простое число.

Предположим, среди чисел  $1, 2, 3, \dots, 2^n$  содержится  $s \leq m$  простых чисел  $p_1, p_2, \dots, p_s$ . Тогда каждое число, не превосходящее  $2^n$ , представимо в виде  $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ , где, очевидно, каждый показатель степени  $k_i$  не больше  $n$ . Однако (по правилу произведения) чисел такого вида  $(1+n)^s$ , что меньше  $2^n$ . Полученное противоречие доказывает утверждение.

Поскольку, как известно из анализа, показательная функция «растет быстрее» степенной, и для любого (сколь угодно большого)  $m$  при достаточно больших  $n$  неравенство  $2^n > (1+n)^m$  имеет место, получено доказательство бесконечности множества простых чисел. ©

15. Докажем сначала, что среди чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  не менее четверти свободны от квадратов (т.е. не делятся на квадраты целых чисел).<sup>4</sup>

Среди чисел  $\{1, 2, \dots, n\}$  имеем не более  $n/p^2$  чисел, делящихся на  $p^2$ . Поэтому количество чисел, делящихся на квадрат простого числа, не больше

$$\sum_{p \leq \sqrt{n}} \frac{n}{p^2} < \frac{n}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n}{k(k+1)} = \frac{n}{4} + n \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{3n}{4}.$$

Пусть теперь  $p_k$  есть  $k$ -е простое число,  $k \in \mathbf{N}$ . Первые (по возрастанию)  $k-1$  простых чисел порождают  $2^{k-1}$  чисел, свободных от квадратов. Поэтому среди чисел от 1 до  $4 \cdot 2^{k-1} = 2^{k+1}$  содержится по меньшей мере  $k$  простых чисел (в противном случае доля чисел, свободных от квадратов, была бы менее четверти), т.е.  $p_k \leq 2^{k+1}$ . Это не только доказывает теорему Евклида, но и дает оценку сверху (разумеется, довольно грубую) для  $k$ -го простого числа. ©

**Гармонический ряд и трансцендентность числа  $\pi$**

16 (Эйлер). Для каждого простого числа  $p$  ряд

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \quad (9)$$

сходится, будучи геометрической про-

<sup>4</sup> Отметим, что известен (см., например, [2]) следующий факт: доля чисел, свободных от квадратов, в множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  с ростом  $n$  стремится к  $\frac{6}{\pi^2} = 0,6079\dots$

грессией со знаменателем  $\frac{1}{p} < 1$ . Если простых чисел конечное множество  $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ , то, перемножив соответствующие им (положительные) сходящиеся ряды (9), вновь получим сходящийся ряд. В то же время его общий член имеет вид  $\frac{1}{p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}}$ , где  $k_i$  – неотрицательные целые числа. В силу основной теоремы арифметики и сделанного предположения рассматриваемый ряд состоит из всех чисел вида  $\frac{1}{n}$ , т.е. является гармоническим рядом, который, как известно, не является сходящимся. Противоречие. ©

Итак, расходимость гармонического ряда доказывает бесконечность множества простых чисел! Не менее удивительным является факт, легший в основу следующего доказательства.

17. Для каждого простого числа  $p$  имеем

$$1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^6} + \dots = \frac{p^2}{p^2 - 1}. \quad (10)$$

Если простых чисел конечное множество  $\{p_1, p_2, \dots, p_s\}$ , то, перемножив соответствующие им (положительные) сходящиеся ряды (10), вновь получим сходящийся ряд с суммой  $S = \frac{p_1^2}{p_1^2 - 1} \cdot \frac{p_2^2}{p_2^2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_s^2}{p_s^2 - 1}$ . Ясно, что  $S$  – рациональное число. Общий член

ряда имеет вид  $\frac{1}{p_1^{2k_1} p_2^{2k_2} \dots p_s^{2k_s}}$ , где  $k_i$  – неотрицательные целые числа. В силу основной теоремы арифметики и сделанного предположения рассматриваемый ряд состоит из всех чисел вида  $\frac{1}{n^2}$ . Сумма такого ряда, как известно, равна  $\frac{\pi^2}{6}$ . Для получения противоречия осталось убедиться в том, что

число  $\frac{\pi^2}{6}$  иррационально. Действительно, в противном случае число  $\pi$ , будучи корнем уравнения с рациональными коэффициентами  $\frac{x^2}{6} - \frac{\pi^2}{6} = 0$ , было бы числом алгебраическим, в то время как это не так (доказательство трансцендентности числа  $\pi$  можно найти в [4]). ©

**Функция Эйлера**

Функция Эйлера  $\varphi(n)$  – число натуральных чисел, не превосходящих  $n$  и взаимно простых с  $n$ . Из определения следует, что если  $p$  – простое число, то  $\varphi(p) = p - 1$ . Известно ([4]), что

функция Эйлера мультипликативна, т.е. если числа  $n$  и  $m$  взаимно просты, то  $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$ . Докажем теперь теорему Евклида с помощью функции Эйлера.

18. Предполагая, что множество простых чисел конечно и состоит из чисел  $p_1, p_2, \dots, p_s$ , рассмотрим их произведение  $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_s$ . Ни одно число, кроме 1, не может быть взаимно просто с  $P$ , откуда  $\varphi(P) = 1$ . С другой стороны,  $\varphi(P) = \varphi(p_1 p_2 \dots p_s) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \dots (p_s - 1) > 1$ . Противоречие. ©

**Топологическое доказательство<sup>5</sup>**

19 (Фюрстенберг, 1955). Введем на множестве целых чисел следующую топологию. Объявим открытыми множества, представимые в виде объединения бесконечных арифметических прогрессий. Проверка выполнения аксиом топологического пространства не сложна и предоставляется читателю.

Рассмотрим множество  $A_p = \{tp | t \in \mathbf{Z}\}$ . Оно не только открыто (будучи арифметической прогрессией с разностью  $p$ ), но и замкнуто, так как дополнение к нему является объединением открытых множеств  $A_{p,i} = \{tp + i | t \in \mathbf{Z}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ . Если простых чисел конечное множество, то объединение конечного числа замкнутых множеств  $B = \bigcup A_p$  есть зам-

кнутое множество. Любое число, отличное от 1 и -1, кратно некоторому простому числу и, значит, принадлежит множеству  $B$ . Стало быть,  $B = \mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ . Поэтому  $\{-1, 1\}$  есть открытое множество (будучи дополнением к замкнутому множеству  $B$ ), что противоречит определению открытого множества. ©

**Литература**

[1] Липцман В. *Теорема Пифагора*. – М.: ГИФМЛ, 1960.  
 [2] Бухштаб А.А. *Теория чисел*. – М.: Просвещение, 1966.  
 [3] Виноградов И.М. *Основы теории чисел*. – М.: Наука, 1981.  
 [4] Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б. *Введение в теорию чисел*. – М.: Изд-во МГУ, 1995.  
 [5] Поля Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа*. Т.2. – М.: Наука, 1978.  
 [6] Трост Э. *Простые числа*. – М.: ГИФМЛ, 1959.  
 [7] <http://www.utm.edu.research/primes>.

<sup>5</sup> Для «знаковок»!

# Проводящий шар в однородном поле

А. ЧЕРНОУЦАН

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ одну-единственную задачу – о проводящем шаре, внесенном в однородное электрическое поле. Полное решение включает в себя как вычисление распределения заряда по поверхности шара, так и определение напряженности поля в окружающем пространстве. Трудность задачи состоит в том, что распределение заряда заранее не известно, и поэтому для вычисления поля нельзя просто воспользоваться методом суперпозиции.

Для полного или хотя бы частичного решения таких задач порой используют соображения симметрии, но в большинстве случаев приходится фактически угадывать ответ. В основе всех «угадывательных» подходов лежит *теорема единственности*, смысл которой состоит в том, что хорошо угаданное решение и есть единственно правильное. Иногда удается угадать распределение зарядов на проводнике, исходя из которого вычисляется поле, иногда наоборот – сначала угадывают поле, а потом уже вычисляют распределение заряда. Самым красивым методом угадывания (или подбора) решения является известный *метод электростатических изображений*, с помощью которого решаются такие важные задачи, как проводящая плоскость или проводящий шар в поле точечного заряда.

Задача о проводящем шаре в однородном поле интересна тем, что позволяет продемонстрировать несколько подходов, в том числе соображения симметрии и метод электростатических изображений. Однако начнем мы с того, что дадим точную формулировку задачи и сразу же приведем ее ответ – тот самый, который затем будем получать различными способами и с разных сторон.

## Формулировка и ответ

### Формулировка:

В однородное поле с напряженностью  $\vec{E}_0$  помещают незаряженный проводящий шар радиусом  $R$ .

а) Требуется найти распределение наведенного заряда по поверхности шара. Ясно, что поверхностная плотность заряда  $\sigma$  может зависеть только от угла  $\theta$ , который образует с вектором  $\vec{E}_0$  радиус, проведенный к данной точке поверхности (рис.1). Значит, ответ должен выражаться функцией  $\sigma(\theta)$ .

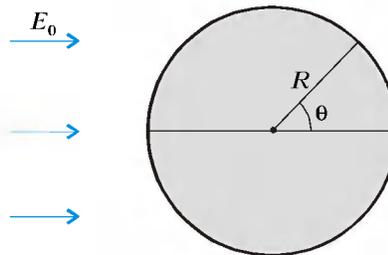


Рис. 1

б) Требуется определить поле, создаваемое этим наведенным зарядом в пространстве вне шара. Ответ должен выражаться либо функцией  $\vec{E}_{\text{нав}}(r, \theta)$ , где  $r$  – расстояние от выбранной точки до центра шара ( $r > R$ ), либо функцией  $\varphi_{\text{нав}}(r, \theta)$ , либо указанием алгоритма по их вычислению. Полная напряженность будет при этом равна  $\vec{E} = \vec{E}_{\text{нав}} + \vec{E}_0$ . Заметим, что так как полная напряженность внутри шара должна быть равна нулю, наведенный заряд при  $r < R$  должен создавать напряженность  $-\vec{E}_0$ .

### Ответ:

а) Зависимость поверхностной плотности заряда от угла  $\theta$  имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta, \quad (1)$$

где максимальная плотность  $\sigma_0$  выражается через напряженность  $E_0$ :

$$\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_0 \quad (2)$$

( $\epsilon_0$  – электрическая постоянная).

б) Поле вне шара совпадает с полем *точечного диполя* с дипольным моментом

$$\vec{p} = 3V\epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (3)$$

( $V$  – объем шара), помещенного в центр шара.

Если вы успели забыть (или не успели узнать), что такое диполь и что такое дипольный момент, напомним: диполем называют систему двух точечных зарядов  $q$  и  $-q$ , а дипольный момент  $\vec{p}$  такого диполя равен  $q\vec{l}$ , где  $\vec{l}$  – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. На большом расстоянии ( $r \gg l$ ) поле диполя определяется его дипольным моментом. Соответствующие формулы выведены в Приложении, а здесь нам осталось пояснить, что такое бесконечно малый объект получается предельным переходом  $l \rightarrow 0$ ,  $q \rightarrow \infty$ , при котором величина дипольного момента  $p = ql$  остается постоянной.

## Теорема единственности

Как уже было сказано, теорема единственности является важным подспорьем для всякого, кто пытается решить какую-нибудь не очень тривиальную задачу электростатики или хочет достаточно строго обосновать какое-нибудь утверждение. Поэтому мы сочли уместным выделить отдельный параграф для ее обсуждения.

Отметим, что задачи с проводниками могут формулироваться по-разному – для каждого из проводников может быть задан или его заряд, или его потенциал. Но в любом случае существует единственное решение поставленной задачи.

Для дальнейшего удобно «заготовить» две формулировки теоремы единственности.

**Первая формулировка.** Существует единственное *распределение зарядов* по поверхности проводников, при котором напряженность поля внутри проводника равна нулю, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Исходя из такого подхода решается, например, задача о распределении заряда по поверхности тонкого проводящего диска (см. «Квант» №1 за 1998 г.).

**Вторая формулировка.** Существует единственное *распределение напряженности поля* в пространстве вне проводников, при котором поверхности проводников оказываются эквипотенциальными, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Именно такой подход (подбор правильного поля) лежит в основе метода электростатических изображений (см. «Квант» №1 за 1996 г.).

### Соображения симметрии

Исходя из соображений симметрии (и единственности) можно дать столь простое и изящное доказательство формулы (1), что кажется, будто она возникает «из ничего», как кролик из шляпы фокусника. Мы представим это доказательство в виде цепочки последовательных утверждений.

**Утверждение 1.** Во всех точках окружности большого круга, перпендикулярного напряженности  $\vec{E}_0$  (т.е. в точках с  $\theta = 90^\circ$ ), поверхностная плотность заряда равна нулю (рис.2). Это

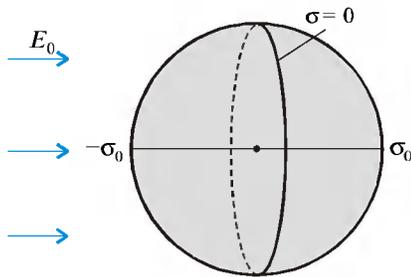


Рис. 2

следует из симметрии между положительными и отрицательными зарядами.

**Утверждение 2.** Если при помещении шара в поле с напряженностью  $\vec{E}_1$  поверхностная плотность заряда в некоторой точке равна  $\sigma_1$ , а при помещении в поле с напряженностью  $\vec{E}_2$  она равна  $\sigma_2$ , то в поле с напряженностью  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$  поверхностная плотность заряда в этой точке будет  $\sigma_1 + \sigma_2$ . То, что поверхностные плотности, наведенные разными полями, складываются, следует из теоремы единственности: каждая поверхностная плотность уничтожит свою напряженность, и *полная напряженность* останется равной нулю, поскольку существует лишь *единственное* распределение заряда, удовлетворяющее этому условию.

**Утверждение 3.** Если напряженность внешнего поля увеличить в  $\alpha$  раз ( $\vec{E}' = \alpha \vec{E}$ ), то поверхностная плотность заряда в каждой точке увеличится в  $\alpha$  раз ( $\sigma' = \alpha \sigma$ ). Действительно, увеличение в  $\alpha$  раз плотности заряда приведет к увеличению в  $\alpha$  раз собственной напряженности, и полная напряженность внутри шара останется равной нулю — в дело опять вступает теорема единственности...

**Основное рассуждение.** Рассмотрим шар, помещенный в однородное поле  $\vec{E}_0$  (рис.3). Пусть максимальная плотность наведенного заряда (при  $\theta = 0$ ) равна  $\sigma_0$ . Чтобы найти  $\sigma(\theta)$ , разложим  $\vec{E}_0$  на две взаимно перпен-

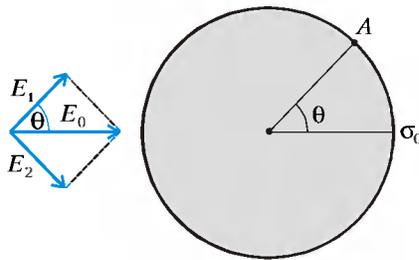


Рис. 3

дикулярные составляющие:  $\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ , одна из которых ( $\vec{E}_1$ ) составляет с  $\vec{E}_0$  угол  $\theta$ . Поскольку  $E_1 = E_0 \cos \theta$ , при помещении шара в поле  $\vec{E}_1$  максимальная плотность заряда в точке A будет  $\sigma_0 \cos \theta$  (см. утверждение 3). А если поместить шар в поле  $\vec{E}_2$ , поверхностная плотность заряда в точке A будет равна нулю (см. утверждение 1). Значит, в соответствии с утверждением 2, в поле  $\vec{E}_0$  поверхностная плотность заряда в точке A будет  $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$ .

Конечно, такое рассуждение не позволяет сразу определить, чему равна  $\sigma_0$ . Но эта задача гораздо проще, чем задача об определении неизвестного распределения заряда. Когда распределение уже известно, можно воспользоваться принципом суперпозиции, выразить напряженность, создаваемую этим распределением в центре шара, и приравнять ее к  $E_0$ . Если вы умеете интегрировать, попробуйте таким образом получить формулу (2).

Однако задача о напряженности, создаваемой наведенными зарядами вне шара, в рамках этого подхода остается нерешенной. Два других подхода позволят нам получить более полное решение поставленной задачи.

### Метод электростатических изображений

Метод электростатических изображений позволяет не угадать распределение наведенных зарядов по поверхности, а определить создаваемое ими поле, заменив его полем воображаемых зарядов (изображений), расположенных внутри проводника. Заряды-изображения подбираются так, чтобы полное поле, создаваемое ими и внешними зарядами, имело «правильные» свойства на границе проводника. Например, если проводник по условию заземлен, то это поле должно иметь всюду на границе нулевой потенциал. Если же задан заряд проводника, то, во-первых, поверхность проводника должна быть эквипотенциальной и,

во-вторых, сумма зарядов-изображений должна быть равна заданному заряду. Поскольку существует единственное поле, удовлетворяющее таким, как их называют, «граничным условиям», то поле зарядов-изображений должно совпадать с полем наведенных зарядов проводника. Вот несколько примеров.

**Пример 1. Точечный заряд и проводящая плоскость.** Этот пример хорошо известен многим школьникам. Если точечный заряд  $q$  поднести на расстояние  $a$  к бесконечной проводящей плоскости (рис.4,а), то возникающее при этом поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис.4,б): самого заряда  $q$  и заряда-изображения  $-q$ ,

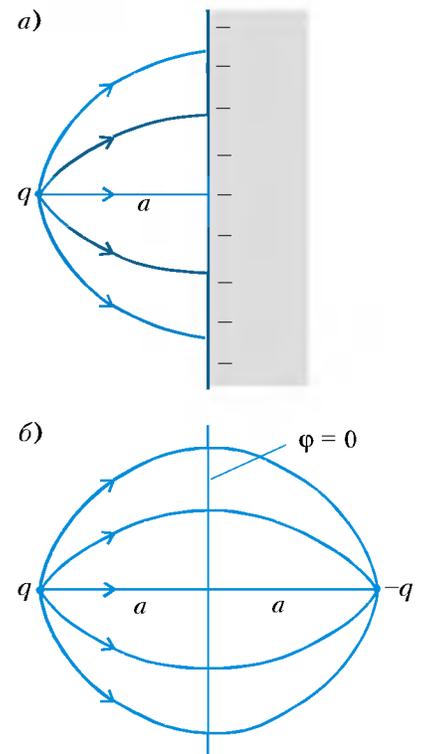


Рис. 4

расположенного за плоскостью симметрично заряду  $q$  (как изображение источника света в плоском зеркале). Действительно, эквипотенциальная поверхность поля двух таких зарядов с  $\phi = 0$  совпадает с поверхностью проводника. Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами в пустом пространстве, совпадает с полем одного точечного заряда  $-q$ .

**Пример 2. Точечный заряд и заземленный шар.** Если к заземленному шару радиусом  $R$  на расстояние  $L$  от его центра ( $L > R$ ) поднести точечный заряд  $q$  (рис.5,а), то возникающее поле совпадает с полем двух точечных зарядов (рис.5,б): самого заряда  $q$  и заряда-изображения, равного

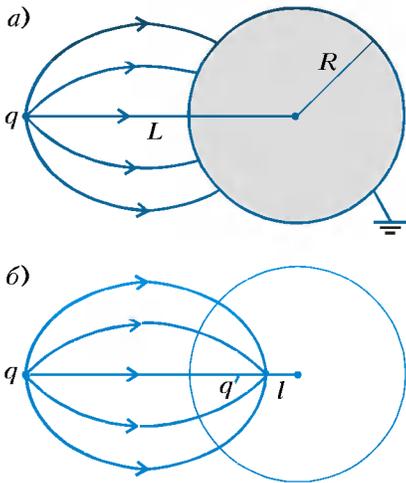


Рис. 5

$q' = -qR/L$  и расположенного на расстоянии  $l = R^2/L$  от центра шара.

Тожественное совпадение этих двух полей следует из утверждения, что эквипотенциальная поверхность с  $\varphi = 0$  для поля зарядов  $q$  и  $q'$  совпадает с поверхностью шара. Убедимся в этом. Возьмем произвольную точку  $A$  на поверхности шара (рис. 6) и обозначим через  $r_1$  расстояние от

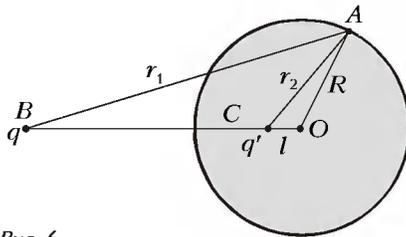


Рис. 6

нее до заряда  $q$  (точка  $B$ ), а через  $r_2$  — расстояние до заряда  $q'$  (точка  $C$ ). Поскольку  $AO : OC = R/l = L/R = BO : OA$ , треугольник  $AOC$  подобен треугольнику  $BOA$ . Значит, для любой точки  $A$  отношение  $r_1/r_2$  равно  $L/R$  и потенциал  $\varphi(A) = kq/r_1 + kq'/r_2$  равен нулю (напомним, что  $q' = -qR/L$ ).

Иначе говоря, поле, создаваемое наведенными зарядами вне шара, совпадает с полем одного точечного заряда  $q'$ .

**Пример 3. Точечный заряд и заряженный шар.** Если в условии предыдущего примера заменить заземленный шар на заряженный зарядом  $Q$ , то к заряду-изображению  $q'$  необходимо добавить второй заряд-изображение  $q'' = Q - q'$ , помещенный в центр шара.

Каким же образом можно использовать метод электростатических изображений в случае проводящего шара в однородном поле? Поскольку результат не должен зависеть от того, какая система зарядов является источником поля  $\vec{E}_0$ , будем считать, что оно созда-

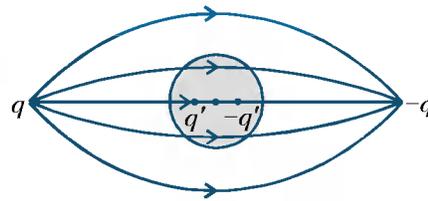


Рис. 7

ется двумя зарядами  $q$  и  $-q$  (рис. 7), расположенными симметрично относительно центра шара на большем от него расстоянии ( $L \equiv R$ ). Величину зарядов надо выбрать таким образом, чтобы создаваемая ими в центре шара напряженность была равна  $E_0$ :

$$\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 L^2} = E_0.$$

Поле наведенных зарядов в пространстве вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов  $q'$  и  $-q'$ , где  $q' = -qR/L$ , расположенных на расстоянии  $l = R^2/L$  от центра. Два заряда-изображения образуют диполь с дипольным моментом, равным

$$p = q' \cdot 2l = \frac{2qR^3}{L^2} = 3V\epsilon_0 E_0,$$

что совпадает с формулой (3). Если рассмотреть предельный переход, при котором заряды удаляются на бесконечность, но одновременно их величина меняется так, что напряженность поля остается равной  $E_0$ , то поле будет стремиться к однородному, а диполь будет стремиться к точечному (при сохранении дипольного момента).

Остается ответить на вопрос: как в рамках метода электростатических изображений найти не только поле наведенных зарядов, но и их распределение по поверхности? Это можно сделать с помощью соотношения, связывающего напряженность поля у поверхности проводника с поверхностной плотностью заряда:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Например, в случае заряда и проводящей плоскости нетрудно вычислить напряженность поля зарядов  $q$  и  $-q$  на

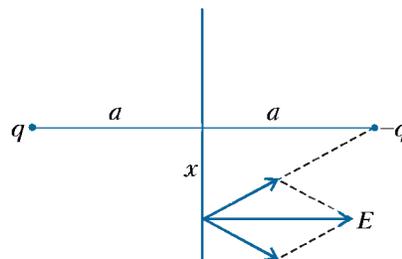


Рис. 8

расстоянии  $x$  от точки, лежащей посередине между ними (рис. 8), и найти поверхностную плотность зарядов:

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{qa}{2\pi(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

В случае шара в однородном поле надо вычислить полное поле, равное сумме однородного внешнего поля и поля точечного диполя (см. Приложение) возле поверхности сферы. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Как убедиться в справедливости формулы (4)? Проще всего это сделать с помощью теоремы Гаусса (кто с ней знаком), но можно обойтись и без нее. Представим поле вблизи поверхности в виде суперпозиции двух полей (рис. 9): поля  $\vec{E}_1$ , созданного малым близлежащим участком поверхнос-

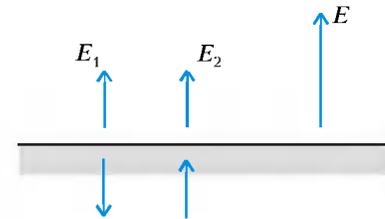


Рис. 9

ти, которое можно считать равным полю бесконечной плоскости  $E_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$  (в пределе, когда расстояние до поверхности мало по сравнению с размером этого участка), и поля остальных зарядов  $E_2$ . Внутри проводника эти два поля должны сократить друг друга, поэтому  $E_2 = E_1 = \sigma/(2\epsilon_0)$ . Вне проводника эти напряженности складываются, откуда и получается формула (4).

Конечно, может возникнуть вопрос: а как (без теоремы Гаусса) получить формулу  $E = \sigma/(2\epsilon_0)$  для напряженности бесконечной равномерно заряженной плоскости, на которую опирается этот вывод? Можно сделать это, рассмотрев поле равномерно заряженной сферы, которое совпадает (вне сферы) с полем точечного заряда, а вблизи поверхности равно  $\sigma/\epsilon_0$ . Если провести такое же рассуждение, как выше, но в обратном порядке, то получим искомую формулу.

### Метод наложения шаров

Последний из рассматриваемых здесь подходов к решению задачи о проводящем шаре в однородном поле дает наиболее полное, и притом достаточно простое, ее решение. Как и раньше, мы разобьем изложение этого метода на несколько последовательных этапов, каждый из которых представляет свою интересную задачу.

**1. Равномерно заряженный шар.** Рассмотрим шар радиусом  $R$ , равномерно заряженный с объемной плот-

ностью  $\rho$ . Напряженность поля вне шара, при  $r > R$ , совпадает с полем точечного заряда  $q = \rho V$ :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho V}{r^2}. \quad (5)$$

Внутри шара, при  $r < R$ , вклад в напряженность дают только заряды, находящиеся внутри сферы радиусом  $r$ , а вклад внешних слоев равен нулю:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0},$$

где  $q(r) = \rho \cdot 4/3 \pi r^3$ . Для дальнейшего удобно записать последнюю формулу в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}. \quad (6)$$

**2. Наложение двух шаров.** Рассмотрим два равномерно заряженных по объему шара: один с объемной плотностью  $\rho$ , другой с объемной плотностью  $-\rho$ . Пусть шары расположены так, что расстояние  $l$  между их центрами меньше суммы их радиусов, т.е. существует область их пересечения (рис. 10). Объемная плотность

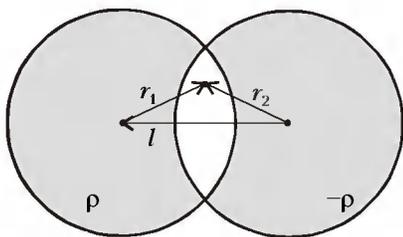


Рис. 10

заряда в этой области равна нулю, а поле равно суперпозиции полей двух шаров. Выберем произвольную точку в этой области и обозначим через  $\vec{r}_1$  радиус-вектор, проведенный к этой точке из центра положительно заряженного шара, а через  $\vec{r}_2$  — радиус-вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара. В соответствии с формулой (6) получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{r}_2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho \vec{l}}{3\epsilon_0}, \quad (7)$$

где  $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  — вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара к центру положительно заряженного.

Мы установили, что поле в области пересечения двух разноименно заряженных (с одинаковой плотностью) шаров является однородным. Этот факт можно использовать для конструирования такого распределения зарядов по поверхности шара, которое уничто-

жит внешнее однородное поле. Покажем, как это сделать.

**3. Шар в однородном поле.** Рассмотрим два разноименно заряженных шара одного и того же радиуса  $R$ , центры которых смещены на малое расстояние  $l_0$  ( $l_0 \ll R$ ). Заряд получившейся системы почти всюду равен нулю, кроме двух тонких равномерно заряженных сегментов (рис. 11): одного с плотностью  $\rho$ , другого с плотностью  $-\rho$ . Толщина этих сегментов в

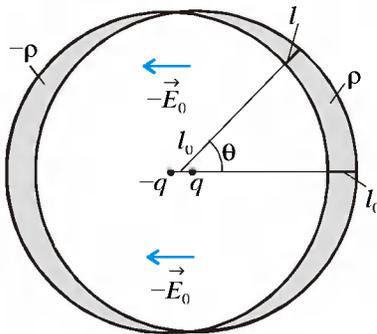


Рис. 11

самом толстом месте равна  $l_0$  и уменьшается с углом  $\theta$  по закону  $l = l_0 \cos \theta$ . Ясно, как перейти к поверхностному заряду: надо рассмотреть предельный переход  $l_0 \rightarrow 0$ , но при этом так менять объемную плотность заряда  $\rho$ , чтобы заряд единицы поверхности, равный  $\rho l_0$ , стремился к определенному пределу  $\sigma_0$ . Поскольку поле этих зарядов внутри полости должно уничтожать внешнее поле  $\vec{E}_0$ , в соответствии с формулой (7) получаем

$$-\frac{\rho \vec{l}_0}{3\epsilon_0} = -\vec{E}_0$$

(вектор  $\vec{l}_0$  проведен от центра отрицательного шара к центру положительного). Значит, предельное значение максимальной поверхностной плотности выражается через величину внешнего поля формулой

$$\sigma_0 = \rho l_0 \rightarrow 3\epsilon_0 E_0,$$

совпадающей с формулой (2). Зависимость от угла  $\theta$  тоже получается правильной:  $\sigma = \rho l = \rho l_0 \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta$ . Кроме того, поле вне системы двух шаров совпадает с полем двух точечных зарядов  $q = \rho V$  (см. формулу (5)) и в пределе переходит в поле точечного диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = q \vec{l}_0 = \rho V \vec{l}_0 \rightarrow 3V\epsilon_0 \vec{E}_0.$$

**Приложение. Поле диполя**

Чтобы вычислить поле точечного диполя, можно сначала написать точное выра-

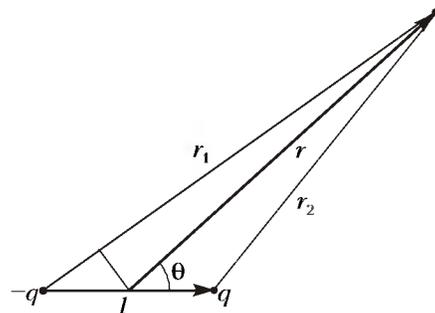


Рис. 12

жение для поля двух зарядов  $q$  и  $-q$ , а потом расстояние между ними устремить к нулю. Однако лучше вычислить поле конечного диполя сразу на большом расстоянии от него ( $r \gg l$ ), где поля обоих диполей совпадают.

Проще всего вычислить потенциал поля диполя. Обозначив расстояние до центра диполя через  $r$ , расстояние до отрицательного заряда  $r_1$ , а до положительного  $r_2$ , получим (рис. 12)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1} \right) = \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{r - \frac{l}{2} \cos \theta} - \frac{q}{r + \frac{l}{2} \cos \theta} \right) = \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql \cos \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Это выражение часто записывают через скалярное произведение:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{p} \vec{r})}{r^3}, \quad (8)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из центра диполя.

Для вычисления напряженности поля можно воспользоваться связью между напряженностью и потенциалом. Мы оставим это упражнение тем, кто уже научился уверенно дифференцировать сложные выражения, и покажем, как можно обойтись без этого.

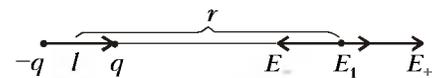


Рис. 13

Вычислим сначала напряженность для двух простых случаев — когда точка поля лежит на одной линии с зарядами (рис 13):

$$\begin{aligned} E_1 &= E_+ - E_- = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(r-l/2)^2} - \frac{q}{(r+l/2)^2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}, \end{aligned}$$

или в векторном виде:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}, \quad (9)$$

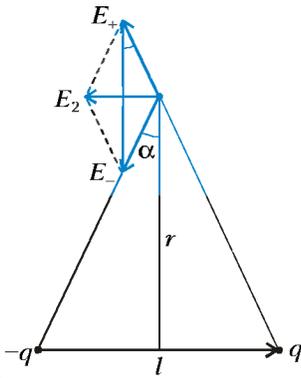


Рис. 14

и когда точка поля лежит на перпендикуляре к дипольному моменту (рис.14):

$$E_2 = 2E_+ \sin \alpha \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2} \frac{l/2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3},$$

или в векторном виде:

$$\vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}. \quad (10)$$

Теперь, чтобы найти напряженность поля в точке, для которой радиус-вектор образу-

ет с дипольным моментом угол  $\theta$ , поступим следующим образом. Соединим отрицательный заряд с точкой поля (рис.15), опустим из положительного заряда перпендикуляр на эту линию и мысленно поместим в основание перпендикуляра два заряда:  $q$  и  $-q$ . Поскольку мы поместили их в одну точку, поле не изменилось, но мы получили вместо одного диполя два. У

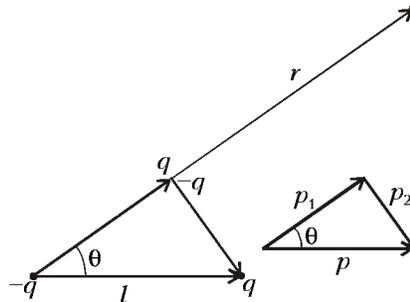


Рис. 15

одного из них дипольный момент  $p_1$  направлен параллельно радиусу-вектору  $\vec{r}$ , а у другого дипольный момент  $p_2$  перпендикулярен  $\vec{r}$ . Легко убедиться, что

$p_1 = p \cos \theta$  (напомним, что  $r \equiv l$ ), или в векторном виде

$$\vec{p}_1 = \vec{r} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^2},$$

а  $p_2 = p \sin \theta$ , или в векторном виде

$$\vec{p}_2 = \vec{p} - \vec{p}_1.$$

Опираясь на формулы (9) и (10), можно вычислить параллельную и перпендикулярную вектору  $\vec{r}$  составляющие поля:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(p \cos \theta)}{r^3}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3},$$

а можно, подставив векторные выражения для  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , получить ответ в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right).$$

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

# Законы сохранения в задачах на столкновения

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

**В** ФИЗИКЕ ПОД СТОЛКНОВЕНИЯМИ понимают процессы кратковременного взаимодействия между телами в широком смысле слова, а не только как соприкосновение тел. Сталкивающиеся тела на большом расстоянии являются свободными. Проходя друг мимо друга, тела взаимодействуют между собой, в результате могут происходить различные процессы – соединение тел, возникновение новых тел и т.п. Наконец, может иметь место *упругое* столкновение, при котором тела после некоторого сближения вновь расходятся без изменения своего внутреннего состояния. Столкновения, приводящие к изменению внутреннего состояния тел, называются *неупругими*.

Происходящие в обычных условиях столкновения обычных тел почти всегда бывают в той или иной степени неупругими – уже хотя бы потому, что они сопровождаются некоторым нагреванием тел, т.е. переходом части их кинетической энергии в тепло. Тем не менее, в физике понятие об упругих столкновениях играет важную роль. В частности, с такими столкновениями приходится иметь дело в физическом эксперименте в области атомных явлений.

Обсудим несколько конкретных задач.

**Задача 1.** Протон, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол  $\beta = \arccos(4/15)$ , а

величина скорости протона уменьшилась на 10% (рис.1). Найдите массовое число химического элемента.

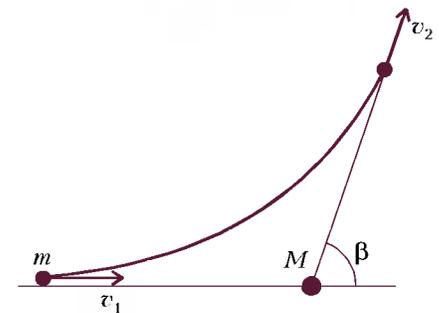


Рис. 1

Взаимодействие частиц упругое; следовательно, импульс и энергия системы сохраняются:

$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 + M\vec{v},$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$

где  $m$ ,  $v_1$  и  $v_2$  – масса и скорости протона,  $M$  и  $v$  – масса и скорость неизвестного ядра. Из закона сохранения импульса с помощью теоремы косинусов получаем

$$(Mv)^2 = (mv_1)^2 + (mv_2)^2 - 2m^2 v_1 v_2 \cos \beta.$$

Из двух последних соотношений по-

лучаем искомое массовое число:

$$A = \frac{M}{m} = \frac{1 + k^2 - 2k \cos \beta}{1 - k^2} = 7,$$

где  $k = \frac{v_2}{v_1} = 0,9$ .

Следовательно, протон столкнулся с ядром лития.

**Задача 2.** Каков максимальный угол  $\theta$  упругого рассеяния  $\alpha$ -частицы в водороде? Масса атома водорода в 4 раза меньше массы  $\alpha$ -частицы.

**Первый способ решения.** Проанализируем упругое столкновение в лабораторной (неподвижной) системе отсчета. Введем обозначения:  $m_1$  – масса  $\alpha$ -частицы,  $v$  – ее скорость до рассеяния,  $m_2$  – масса атома водорода,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости  $\alpha$ -частицы и атома водорода, соответственно, после рассеяния.

Взаимодействие упругое; следовательно, сохраняются импульс (рис. 2)

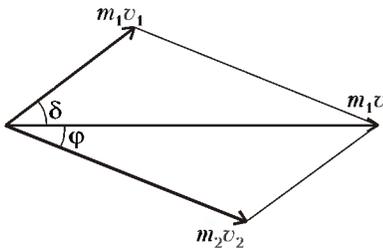


Рис. 2

и кинетическая энергия системы  $\alpha$ -частица – атом водорода:

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 \cos^2 \delta + m_2 v_2^2 \cos^2 \phi,$$

$$m_1 v_1 \sin \delta = m_2 v_2 \sin \phi,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Исключив из этих соотношений угол  $\phi$  и скорость  $v_2$ , получим относительно  $v_1$  квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1 v \cos \delta \cdot v_1 + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

Корни этого уравнения будут вещественными при  $\sin \delta \leq m_2/m_1$ . Максимальный угол  $\delta$ , удовлетворяющий этому условию, и есть искомый угол  $\theta$ . Таким образом,

$$\theta = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \approx 0,25 \text{ рад.}$$

Заметим, что рассеяние на максимальный угол возможно только при условии, что масса налетающей частицы больше массы покоящейся.

**Второй способ решения.** В общем случае столкновение удобно рассматривать в системе центра масс сталкивающихся частиц (в системе, где их суммарный импульс равен нулю). Скорость центра масс нашей системы тел равна

$$\vec{V} = \frac{m_1 \vec{v}}{m_1 + m_2}.$$

До столкновения импульс частицы массой  $m_1$  равен

$$\vec{p} = m_1 (\vec{v} - \vec{V}) = \frac{m_1 m_2 \vec{v}}{m_1 + m_2},$$

а импульс частицы массой  $m_2$  равен  $-\vec{p}$ .

При упругом столкновении импульс и энергия взаимодействующей системы тел сохраняются. Так что если импульс первой частицы после столкновения обозначить  $\vec{p}_{\&}$ , то импульс второй будет  $-\vec{p}_{\&}$ . Из закона сохранения энергии, записанном в виде

$$p^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = p_{\&}^2 \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right),$$

находим

$$p = p_{\&}$$

Таким образом, единственное, что происходит в рассматриваемой системе при столкновении, это поворот импульсов частиц, т.е. изменение их направления без изменения величины. Вместе с импульсами так же изменяются и скорости обеих частиц. Угол поворота зависит от конкретного характера взаимодействия частиц и от их взаимного расположения при столкновении.

При переходе в лабораторную систему отсчета воспользуемся правилом сложения скоростей. В соответствии с ним, скорость налетающей частицы после столкновения равна

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_{1\&},$$

где  $\vec{v}_{1\&}$  – ее скорость в системе центра масс. На рисунке 3 из одной точки

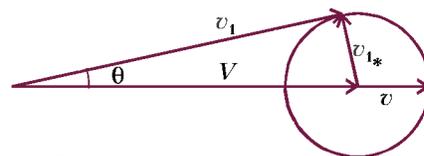


Рис. 3

отложены векторы  $\vec{V}$  – скорость центра масс системы и  $\vec{v}$  – скорость налетающей частицы до столкновения.

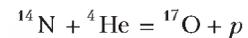
Величина

$$v_{1\&} = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$$

определяет радиус окружности, на которой заканчивается вектор  $\vec{v}_1$ . Из рисунка следует, что в случае  $m_1 > m_2$  угол между векторами скоростей  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_1$  налетающей частицы до и после столкновения не может превышать некоторого максимального значения  $\theta$ , соответствующего случаю, когда  $\vec{v}_1$  касается окружности, т.е.

$$\theta = \arcsin \frac{v_{1\&}}{V} = \frac{m_2}{m_1} \approx 0,25 \text{ рад.}$$

**Задача 3.** Первая искусственная ядерная реакция



наблюдая Резерфордом в 1919 году. Она идет с поглощением энергии  $Q = 1,13$  МэВ. Какую минимальную кинетическую энергию  $E_{\text{нпр}}$  следует сообщить в лабораторной системе отсчета  $\alpha$ -частице, чтобы при бомбардировке неподвижной мишени из азота указанная реакция могла произойти?

Пороговой энергией  $E_{\text{пор}}$ , или порогом ядерной реакции, называют такую энергию налетающей на неподвижную мишень частицы, начиная с которой ядерная реакция становится возможной.

Сначала – небольшое отступление. Найдем связь кинетических энергий  $E_k$  и  $E_{k\&}$  системы материальных точек в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс соответственно. По закону сложения скоростей, для каждой  $i$ -й материальной точки

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{v}_{i\&},$$

где  $\vec{V}$  – скорость центра масс системы. Тогда кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе равна

$$E_k = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\vec{V} + \vec{v}_{i\&})^2}{2} = \sum \frac{m_i V^2}{2} + \sum \frac{m_i v_{i\&}^2}{2} + \vec{V} \sum m_i \vec{v}_{i\&}$$

Сумма  $\sum m_i \vec{v}_{i\&}$  равна нулю, так как она определяет скорость центра масс в системе центра масс. Таким образом,

$$E_k = \frac{MV^2}{2} + E_{k\&},$$

т.е. кинетическая энергия совокупно-

ти материальных точек в лабораторной системе отсчета равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же совокупности материальных точек в ее относительном движении в системе центра масс.

Теперь приступим к решению задачи. Обозначим через  $\vec{p}_0$  импульс  $\alpha$ -частицы до столкновения. Кинетическая энергия движения центра масс системы

$$\frac{MV^2}{2} = \frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_{\text{пор}}$$

не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Тогда искомую энергию найдем из условия

$$E_{\text{пор}} = Q + \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_{\text{пор}},$$

откуда

$$E_{\text{пор}} = \frac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} Q = 1,45 \text{ МэВ.}$$

Заметим, что минимум кинетической энергии бомбардирующей частицы достигается в случае, когда продукты реакции покоятся в системе центра масс.

**Задача 4.** *Неподвижный невозбужденный атом водорода поглощает фотон. В результате атом переходит в возбужденное состояние и начинает двигаться. Найдите величину  $v$  скорости, с которой стал двигаться атом после поглощения фотона. Энергия возбуждения атома водорода  $E_{12} = 1,63 \cdot 10^{-18}$  Дж, энергия покоя  $mc^2 = 1,49 \cdot 10^{-10}$  Дж.*

*Указание.* При  $x \ll 1$  можно считать, что  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ .

**Первый способ решения.** Поглощение фотона атомом является типичным неупругим столкновением. Из законов сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{12} + \frac{mv^2}{2}$$

и импульса:

$$\frac{h}{\lambda} = mv$$

находим искомую скорость:

$$v = c \left( \sqrt{1 + \frac{2E_{12}}{mc^2}} - 1 \right) \approx c \frac{E_{12}}{mc^2},$$

которая определяется только отноше-

нием энергии возбуждения к энергии покоя атома водорода. При выводе учтено, что в числителе стоит величина, на много порядков меньшая, чем в знаменателе. Это подтверждает нерелятивистское приближение, использованное в решении.

Итак, при переходе атома водорода из основного состояния в первое возбужденное состояние атом начинает двигаться со скоростью

$$v \approx c \frac{E_{12}}{mc^2} \approx 3,3 \text{ м/с.}$$

**Второй способ решения.** При записи законов сохранения энергии и импульса воспользуемся релятивистскими формулами для энергии и импульса:

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Далее, разделив второе соотношение на первое и получим

$$v = c \frac{hc/\lambda}{mc^2 + hc/\lambda}.$$

Энергия поглощаемого фотона много меньше энергии покоя атома, поэтому выражение можно представить в виде

$$v \approx c \frac{hc/\lambda}{mc^2} = c \frac{E_{12}}{mc^2}.$$

**Задача 5.** *На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой невозбужденный атом водорода. Какова минимальная кинетическая энергия налетающего атома, при которой в результате столкновения может излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода 13,6 эВ.*

Налетающий атом передаст на ионизацию максимально возможную энергию при таком неупругом столкновении, когда оба атома в системе центра масс будут покоиться. Кинетическая энергия движения центра масс системы, равная

$$\frac{p^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{p^2}{4m_p} = \frac{E_{\text{пор}}}{2}$$

(где  $m_p$  – масса протона, а  $E_{\text{пор}}$  – пороговая энергия), не изменяется при ядерной реакции, так как импульс замкнутой системы сохраняется и поэтому указанная энергия не участвует в ядерных превращениях. Фотон унесет минимальную энергию, если электрон в атоме водорода перейдет с первого уровня на второй. Для этого атом должен поглотить

энергию

$$h\nu_{12} = hR \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4} hR = \frac{E_{\text{пор}}}{2},$$

где  $R$  – постоянная Ридберга. При ионизации электрон переходит с первого уровня на бесконечность; следовательно, энергия ионизации

$$E_{\text{и}} = hR.$$

Из полученных соотношений находим

$$E_{\text{пор}} = \frac{3}{2} E_{\text{и}} = 20,4 \text{ эВ.}$$

**Задача 6.** *Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в обратном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.*

При энергиях в сотни тысяч электронвольт необходим учет релятивистских эффектов. Законы сохранения энергии и импульса принимают вид

$$mc^2 + \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{hc}{\lambda},$$

$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda} + \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

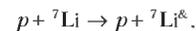
где  $m$  – масса электрона,  $\lambda_0$  и  $\lambda$  – длины волн фотона. Умножим второе равенство на  $c$ , сложим его с первым и вычтем его из первого равенства. Перемножим полученные соотношения, найдем

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 2 \frac{h}{mc} = 4,84 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Заметим, что это вполне согласуется с экспериментальными данными.

**Упражнения**

**1.** Ядро лития возбуждается пучком протонов, падающим на неподвижную литиевую мишень. При этом происходит реакция



При каких отношениях энергии налетающего протона к энергии возбуждения лития возможно возникновение протонов, движущихся в обратном к потоку направлении?

**2.** На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает электрон. Какова минимальная кинетическая энергия  $E_{\text{пор}}$  налетающего электрона, при которой в результате столкновения может излучаться фотон? Энергия ионизации атома водорода  $E_{\text{и}} = 13,6$  эВ.

**3.** Рентгеновский фотон сталкивается с неподвижным электроном и отражается в перпендикулярном направлении. Найдите приращение длины волны фотона в результате рассеяния.

# Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Московский государственный университет

## МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите неравенство

$$\frac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$$

2. О первых семи членах убывающей арифметической прогрессии известно, что сумма пятих степеней всех этих членов равна нулю, а сумма их четвертых степеней равна 51. Найдите седьмой член этой прогрессии.

3. Найдите все корни уравнения

$$\cos x \sin \frac{x}{4} + \frac{9}{10} \sin x + 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4} - \frac{9}{20} = 0,$$

принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{9}{2}\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$ .

4. Перпендикуляр к боковой стороне  $AB$  трапеции  $ABCD$ , проходящий через ее середину  $K$ , пересекает сторону  $CD$  в точке  $L$ . Известно, что площадь четырехугольника  $AKLD$  в пять раз больше площади четырехугольника  $BKLC$ ,  $CL = 3$ ,  $DL = 15$ ,  $KC = 4$ . Найдите длину отрезка  $KD$ .

5. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a - \frac{8}{5}\right) \times \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$

имеет хотя бы одно решение и каждое его решение является целым числом?

6. Вершины квадрата  $PQRS$  со сто-

роной  $25/4$  лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  и повторно пересекают сферу в точках  $P_1$ ,  $Q_1$ ,  $R_1$  и  $S_1$  соответственно. Известно, что  $PP_1 = 2$ ,  $QQ_1 = 10$ ,  $RR_1 = 6$ . Найдите длину отрезка  $SS_1$ .

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$2\sqrt{5 \cdot 6^x - 2 \cdot 9^x - 3 \cdot 4^x} + 3^x < 2^{x+1}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 xy \cdot \log_{4x} y = 2, \\ 8x - y = 1. \end{cases}$$

3. Длина дороги, соединяющей пункты  $A$  и  $B$ , равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта  $A$  или пункта  $B$ , каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/ч, а второй — со скоростью 42 км/ч. Сколько раз за 8 часов движения автобусы

а) встретятся в пункте  $B$ ,

б) окажутся в одном месте строго между пунктами  $A$  и  $B$ ,

если известно, что первый стартует из пункта  $A$ , а второй из пункта  $B$ ?

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$ , пересекает первую окружность в точке  $B$ , а вторую — в точке  $C$ . Касательная к первой окружности, проходящая через точку  $B$ , пересекает вторую окружность в точках  $D$  и  $E$  ( $D$  лежит между  $B$  и  $E$ ). Известно, что  $AB = 5$  и  $AC = 4$ . Найдите длину отрезка  $CE$  и расстояние от точки  $A$  до центра окружности, касающейся отрезка  $AD$  и продолжений отрезков  $ED$  и  $EA$  за точки  $D$  и  $A$  соответственно.

5. Найдите все  $a$ , при которых уравнение

$$\begin{aligned} (|a| - 1) \cos 2x + (1 - |a - 2|) \sin 2x + \\ + (1 - |2 - a|) \cos x + (1 - |a|) \sin x = 0 \end{aligned}$$

имеет нечетное число решений на интервале  $(-\pi; \pi)$ .

6. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Известно, что плоскости треугольников  $ASC$  и  $BSD$  перпендикулярны друг другу. Найдите площадь грани  $ASD$ , если площади грани  $ASB$ ,  $BSC$  и  $CSD$  равны 5, 6 и 7 соответственно.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, олимпиада «Абитуриент-2000», апрель)

1. Решите неравенство

$$\left\|x^2 - 8x + 2\right\| - x^2 \geq 2x + 2.$$

2. Решите уравнение

$$12^x + 6^x - 2 \cdot 4^x - 2 \cdot 3^x - 2^{x+1} + 4 = 0.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{6 - 10 \cos x - \sin x} < \sin x - \cos x,$$

принадлежащие отрезку  $[-\pi; \pi]$ .

4. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$  так, что  $CD = \sqrt{13}$  и  $\sin \angle ACD : \sin \angle BCD = 4 : 3$ . Через середину отрезка  $CD$  проведена прямая, пересекающая стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ , площадь треугольника  $MCN$  равна  $3\sqrt{3}$ , а расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$  в два раза больше расстояния от точки  $N$  до этой же прямой. Найдите площадь треугольника  $ABC$ .

5. Для каждого значения параметра  $a$  найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 - 3y \log_2(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8) + 2 \log_4^2(4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4) = 0, \\ 5y^2 - 8y \log_4(4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4) + 3 \log_2^2(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8) = 0 \end{cases}$$

6. В основании пирамиды  $SABC$  лежит треугольник  $ABC$ , у которого  $AB = 15\sqrt{2}$ ,  $BC = 20$ , а радиус окруж-

ности, описанной около этого треугольника, равен  $5\sqrt{5}$ . На сторонах треугольника  $ABC$  как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке  $O$ . Точка  $O$  является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды  $S$  является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания  $ABC$ . Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ , равна  $8\pi$ . Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

**Вариант 4**

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\sin x \sin|x| \geq -\frac{1}{2}.$$

2. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора одного литра воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора тридцатью девятью литрами воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 литра воды равной 1 кг.

3. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

4. На боковых ребрах  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) расположены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Известно, что угол между прямыми  $KL$  и  $AB$  равен  $\frac{\pi}{4}$ , а угол между прямыми  $KM$  и  $AC$  равен  $\frac{\pi}{3}$ . Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , и плоскостью основания  $ABC$ .

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$$

и

$$x^2 + 86x + y + 202 \geq 0.$$

6. Вершины  $A$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  лежат на одной окружности, а вершины  $B$  и  $D$  – на другой, причем центры окружностей лежат в плоско-

сти параллелограмма. Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 2 соответственно. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, равно 2. Найдите расстояние между центрами окружностей.

**Вариант 5**

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 2x = \sin 7x.$$

2. Решите уравнение

$$3^{\sqrt{x-1}} - 10 \cdot 3^{-\sqrt{x-1}} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$2x^2 + \sqrt{2x^3} > x.$$

4. В  $\triangle ABC$ , в котором  $AD$  – медиана,  $AD = m$ ,  $AB = a$ ,  $AC = b$ . Найдите  $\angle BAC$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\log x + \log_{\sqrt{5}} y = 3, \\ \log_5(y-x-2) + \log_{125}(y-x+2)^3 = \log_3 12. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде высота равна 3, а объем равен  $9\sqrt{3}$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

7. При каких значениях  $b$  уравнение

$$25^x - (2b+5)5^{\frac{x+1}{x}} + 10b \cdot 5^{\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

8. Из точки  $A$  проведены к окружности две касательные ( $M$  и  $N$  – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках  $B$  и  $C$ , а хорду  $MN$  – в точке  $P$ ;  $AB : BC = 2 : 3$ . Найдите  $AP : PC$ .

**Вариант 6**

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$3 \cos 3x + \frac{2}{\cos x} = 3 \cos x.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3 \log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1.$$

4. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $A_1$ , а на продолжении

стороны  $BC$  взята точка  $C_1$  ( $C$  между  $B$  и  $C_1$ ), длина отрезка  $A_1C$  равна 85% длины стороны  $AC$ , а длина отрезка  $BC_1$  равна 120% длины стороны  $BC$ . Сколько процентов площади  $\triangle ABC$  составляет площадь  $\triangle A_1BC_1$ ?

5. Решите уравнение

$$3 \cdot \left| 3^{x-1} - 2 \right| + \left| 9^{\frac{x}{2}} - 3 \right| = 3.$$

6. В  $\triangle ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности,  $AB = a$ ,  $AC = b$ . Прямая  $BD$ , перпендикулярная прямой  $AO$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

7. При каких значениях  $a$  неравенство

$$(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a)\sqrt{1-x} \leq 0$$

имеет единственное решение?

8. Высота конуса равна 6, радиус основания равен 3. Точка  $A$  находится на расстоянии 3 от оси конуса и на расстоянии 4 от плоскости основания конуса. Прямая  $AB$  имеет с конусом единственную общую точку  $C$  и пересекает плоскость основания конуса в точке  $B$ . Расстояние от точки  $C$  до плоскости основания конуса равно 2. Найдите расстояние от точки  $B$  до вершины конуса.

**Вариант 7**

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$|x| = 2 - x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$$

3. Две бригады рабочих мостили два участка дороги (первая бригада – первый участок, вторая – второй), причем объем работ на втором участке был вдвое больше, чем на первом, а в первой бригаде было на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая еще работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

4. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна  $64\pi$ .

5. Треугольники  $DAB$ ,  $DAC$ ,  $DBC$ , представляющие собой боковые грани треугольной пирамиды, имеют одина-

ковые площади. Точка  $A_1$  лежит на ребре  $DA$ , причем  $DA_1 = \frac{2}{5}DA$ , точка  $B_1$  лежит на ребре  $DB$ , причем  $DB_1 = \frac{5}{6}DB$ , точка  $C_1$  лежит на ребре  $DC$ . Известно, что площадь боковой поверхности пирамиды  $DA_1B_1C_1$  составляет  $\frac{47}{90}$  от площади боковой поверхности пирамиды  $DABC$ . Какую часть объема пирамиды  $DABC$  составляет объем пирамиды  $DA_1B_1C_1$ ?

6. Решите уравнение

$$(26 + 15\sqrt{3})^x - 5(7 + 4\sqrt{3})^x + 6(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 5.$$

#### Вариант 8

(биологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2 - 3x}{x + 2} \leq 5.$$

2. Решите уравнение

$$3 \cos 2x + 4 + 11 \sin x = 0.$$

3. Дан треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 6$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 8$ . Точка  $D$  лежит на стороне  $AB$ , а точка  $E$  — на стороне  $AC$ , причем  $AD = 2$ ,  $AE = 3$ . Найдите площадь треугольника  $ADE$ .

4. Решите неравенство

$$\log_4(16(x-2)^2) \cdot \log_{\frac{1}{16}} \frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4} \log_{64}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^2 \leq \frac{15}{2}.$$

5. Внутри правильной треугольной призмы со стороной основания  $a$  лежат три шара одинакового радиуса, каждый из которых касается двух других шаров, двух боковых граней и обоих оснований призмы. Четвертый шар касается трех вышеупомянутых шаров и верхнего основания призмы. Найдите радиус четвертого шара.

#### Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{3 - 2x} \leq 1.$$

2. Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются первым, вторым и третьим членами соответственно некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может

принимать знаменатель геометрической прогрессии.

3. Найдите  $\operatorname{tg} 2\alpha$ , если известно, что

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ а } \sin 4\alpha > 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2.$$

5. Решите уравнение

$$\sin\left(\pi\sqrt{8-x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

6. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ , а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

7. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых при любых значениях параметра  $b$  уравнение

$$|x - 2| + b|2x + 1| = a$$

имеет хотя бы одно решение.

#### Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(5x - 4) \leq 8.$$

2. Вычислите  $\operatorname{tg} 2x$ , если

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{5}.$$

3. От причала  $A$  к причалу  $B$  отплыли катер и лодка, причем скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала  $B$  за 2 часа, а лодка за 4 часа?

4. Решите неравенство

$$4 \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \leq 3.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 30, \\ x^2 + y^2 = 325. \end{cases}$$

6. В трапецию с основаниями 3 и 5 можно вписать окружность и около нее можно описать другую окружность. Вычислите площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, ее мень-

шим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

7. Решите уравнение

$$2(2 - x^2 - x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot (3x^2 - 6x + 4).$$

8. В прямоугольном параллелепипеде, стороны основания которого  $a$  и  $b$ , а высота  $a$ , расположены 9 шаров. Восемь из них одинакового радиуса, причем каждый касается трех граней параллелепипеда и двух соседних шаров. Девятый шар внешним образом касается всех восьми вышеуказанных шаров. Найдите  $R$  — радиус девятого шара. Установите, при каких значениях величины  $\frac{b}{a}$  задача имеет решение, если  $R \leq \frac{a}{4}$ .

#### Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x + 2} = 2x - 4.$$

2. Решите уравнение

$$|2x + 8| - |x - 5| = 12.$$

3. Аэронавт совершил кругосветное путешествие вокруг Земли на воздушном шаре, двигаясь вдоль заданной параллели на постоянной высоте. Оказалось, что разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, вдвое превосходит диаметр шара. На какой широте совершалось это путешествие?

4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}\left(2 - \sqrt{1 + 3x - x^2}\right)\right)$$

при условии  $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \geq \frac{\pi}{6}$ .

5. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна  $v$ . В пункте  $B$ , где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту  $V$ , расположенному вверх по течению реки. Расстояния от  $A$  до  $B$  и от  $B$  до  $V$  равны. Скорости течения притока и реки равны  $u_1$  и  $u_2$  соответственно. На координатной плоскости  $(u_1; u_2)$  укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту  $A \rightarrow B \rightarrow V$  меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

6. Даны функции

$$f(x, y) = |y| + 2|x| - 2$$

и

$$g(x, y, a) = x^2 + (y - a)(y + a).$$

а) При каком наименьшем положительном значении параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

б) При этом значении параметра  $a$  найдите площадь фигуры, координаты  $(x; y)$  всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y, a)} \leq 0.$$

**Вариант 12**

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Имеется 40 литров 0,5%-го раствора и 50 литров 2%-го раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5%-го раствора уксусной кислоты?

2. Через центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , провели прямую  $MN$  параллельно основанию  $AB$  ( $M$  лежит на  $BC$ ,  $N$  лежит на  $AC$ ). Найдите периметр четырехугольника  $ABMN$ , если известно, что  $AB = 5$ ,  $MN = 3$ .

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 2.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$$

и

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют общий корень.

6. Расшифруйте шифровку

$$\begin{pmatrix} * & + & * & = & Л \\ - & & \times & & .. \\ * & + & * & = & О \\ || & & || & & || \\ Д & : & У & : & Б \end{pmatrix}.$$

Про шифровку известно, что в ней  
1) буквы и звездочки означают цифры;  
2) разные буквы означают разные цифры;  
3) звездочки могут означать любые цифры.

**Вариант 13**

(отделение экономики экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$3\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 - x = \left(\sqrt{-x^2 + x + 2}\right)^2.$$

2. Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с  $7^{40}$  до  $17^{35}$  того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в  $11^{15}$ ?

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2 - 9)} \geq \frac{\log_5(x^2 + 8x + 12)}{\log_5(x^2 - 9)}.$$

4. Точка  $Q$  расположена на стороне  $MN$  треугольника  $LMN$  так, что  $NQ : QM = 1 : 2$ . При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки  $Q$  вершина  $L$  переходит в вершину  $N$ , а вершина  $M$  — в точку  $P$ , лежащую на продолжении стороны  $LM$  за точку  $L$ . Найдите углы треугольника  $LMN$ .

5. Найдите все значения  $x$ , при которых числа

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{5})^{3\cos\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right)}, \\ & \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}, \\ & 5^{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

6. Центр шара с радиусом 1 совпадает с основанием высоты правильной четырехугольной пирамиды. Найдите площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит вне этого шара, если высота пирамиды равна  $2\sqrt{2}$ , а плоские углы при вершине пирамиды равны  $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ .

7. Про функцию  $f(x)$  известно, что она определена на отрезке  $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$  и

удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x}, \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решите неравенство  $f(x) \leq \frac{\pi}{8}$ .

**Вариант 14**

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4x \sin 3x = 3x + |x|.$$

2. Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов — целое число, кратное четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Укажите знаменатели всех таких прогрессий.

3. Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспахает одно поле вдвое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найдите наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется сорок минут.

4. Решите неравенство

$$\begin{aligned} 2 + \log_{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \frac{x + 4}{x + 1} & \geq \\ & \geq \log_{(x^2 - 2x - 3)} (x^2 - 2x - 2)^2. \end{aligned}$$

5. В основании пирамиды  $SABC$  лежит треугольник со сторонами  $AB = AC = 5$  и  $BC = 6$ . Ребро  $SA$  перпендикулярно основанию пирамиды. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, если известно, что отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к ребру  $SA$  равно  $\frac{2}{7}$ .

**Вариант 15**

(факультет социологии)

1. Решите уравнение

$$|x^2 - 3x| = 2x - 4.$$

2. В городе  $N$  в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором

## ФИЗИКА

## Задачи устного экзамена

## Физический факультет

году процент роста числа жителей города  $N$  увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найдите процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

3. Решите неравенство

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+2} > \frac{1}{2x+3}.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{11 - 8 \cos^4 x - 4 \sin x \cos x} = 3 \sin x + \cos x.$$

5. В четырехугольник  $ABCD$  вписана окружность с радиусом 2. Угол  $\angle DAB$  прямой. Сторона  $AB$  равна 5, сторона  $BC$  равна 6. Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$ .

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых отношение решений квадратного уравнения

$$(a^2 + 1)x^2 + 4x + \frac{1}{a+1} = 0$$

является целым числом. Кратные корни учитываются дважды.

## Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$|2x - 1| > \frac{1}{x - 2}.$$

2. Определите радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами, длины которых равны 1 и 2, опирается на дугу  $120^\circ$ .

3. Решите уравнение

$$3 \sin 2x - \frac{1}{2} = 4 \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right).$$

4. Решите неравенство

$$(4 - x)^{x^2 - 9} - \sin^2 10^\circ < < (4 - x)^{\frac{1}{\log_{\cos 10^\circ} \sqrt{4 - x}}}.$$

5. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство

$$|x^2 - 2x + a| > 5$$

не имеет решений на отрезке  $[-1; 2]$ .

6. Определите сумму всех таких натуральных чисел  $n$ , для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на  $n$  и  $n + 5$  соответственно.

7. В треугольной пирамиде  $ABCD$  угол между гранями  $ABC$  и  $ACD$  равен  $\frac{\pi}{4}$ , плоский угол  $BAC$  равен  $\frac{\pi}{6}$ , а ребра  $AC$  и  $AD$  перпендикулярны. Найдите длину ребра  $BD$ , если  $AB = 2$ ,  $AD = \sqrt{2}$ .

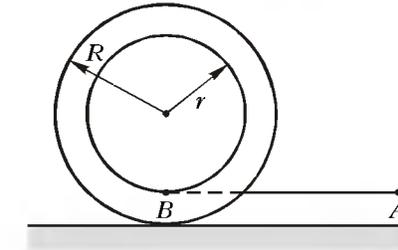


Рис. 1

горизонтальным ускорением  $a$ . При этом катушка начинает двигаться без проскальзывания так, что ее ось не изменяет своей ориентации. Через какое время длина горизонтального участка нити изменится в  $n$  раз, если длина отрезка  $AB$  была  $L_0$ , а внешний радиус катушки  $R$ ?

2. На горизонтальной крышке стола лежит однородный куб массой  $m$ , к середине верхнего ребра которого прикреплена легкая нить. Коэффициент трения куба о крышку  $\mu$ , причем  $\mu < 0,5$ . С какой минимальной силой, направленной перпендикулярно указанному ребру, нужно тянуть за нить, чтобы куб начал поворачиваться без скольжения? Каково направление этой силы?

3. В цилиндрическом сосуде с внутренним радиусом  $R$ , частично заполненном водой, плавает, выступая из воды на высоту  $h$ , однородное деревянное кольцо (рис. 2). Радиус отверстия в кольце  $r$ . В отверстие медленно наливали столько масла, что его верхний уровень достиг верха кольца. В результате уровень воды вне кольца поднялся на некоторую высоту  $x$ . Найдите  $x$ , если плотность масла  $\rho_m$  меньше

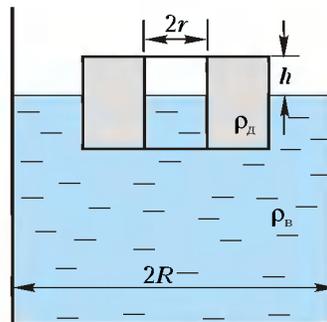


Рис. 2

плотности воды  $\rho_w$ , а плотность дерева  $\rho_d$  больше плотности масла.

4. Прямоугольный сосуд разделен на две равные части гладким толстым поршнем, ось которого горизонтальна. Левая часть сосуда длиной  $L$  полностью заполнена ртутью, при этом ртуть практически не оказывает давления на верхнюю грань сосуда. В правой части сосуда находится воздух. Пренебрегая тепловым расширением сосуда, поршня и ртути, а также давлением насыщенных паров ртути, найдите перемещение поршня при медленном уменьшении абсолютной температуры сосуда с содержимым в  $n = 1,5$  раза. Считать, что при конечной температуре ртуть остается жидкой.

5. На  $pV$ -диаграмме, изображенной на рисунке 3, показано изменение состояния одного моля идеального одно-

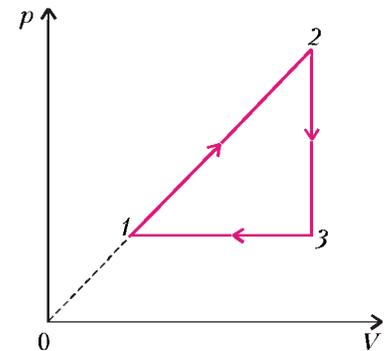


Рис. 3

атомного газа, используемого в качестве рабочего вещества теплового двигателя. Отношение максимальной абсолютной температуры газа к его минимальной температуре в данном цикле равно  $n = 4$ . Во сколько раз отличается КПД  $\eta$  этого цикла от максимально возможного при заданном значении  $n$ ?

6. Каковую минимальную мощность должен потреблять мотор морозильника, работающего по циклу Карно, в камере которого поддерживается температура  $t_1 = -23^\circ\text{C}$ , если в нее через стенки поступает  $Q = 0,1$  МДж тепла за время  $\tau = 1$  ч? Температура радиатора морозильника  $t_2 = 57^\circ\text{C}$ , а КПД мотора  $\eta_m = 0,8$ .

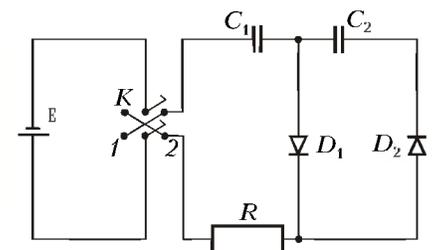


Рис. 4

7. В схеме, показанной на рисунке 4, все конденсаторы разряжены, а двойной ключ  $K$  находится в разомкнутом состоянии. Его перевели в положение 1, а затем, спустя достаточно большое время, в положение 2. Параметры элементов схемы даны на рисунке. Считая диоды идеальными, найдите заряд, который установится на конденсаторе емкостью  $C_2$ .

8. Плоскую рамку, состоящую из небольшого числа  $N$  витков тонкого провода, вращают вокруг горизонтальной оси, лежащей в плоскости рамки, с угловой скоростью  $\omega$  в однородном вертикальном магнитном поле. Концы обмотки замкнуты накоротко, а ее общее сопротивление равно  $R$ . Пренебрегая индуктивностью обмотки, найдите величину  $B$  индукции магнитного поля, если площадь каждого витка  $S$ , а для поддержания вращения к рамке необходимо прикладывать в среднем момент сил  $M_{\text{ср}}$ .

9. Диск радиусом  $R$  из льда с показателем преломления  $n = 1,3$  разрезали по диаметру. Перпендикулярно плоскости разреза на одну из половин диска направили узкий параллельный пучок света, который вышел параллельно падающему пучку на некотором расстоянии  $L$  от него. Найдите расстояние  $L$ , если интенсивности падающего и выходящего пучков почти одинаковы.

10. Точечный источник  $S$ , дающий свет с длиной волны  $\lambda$ , помещен в главный фокус собирающей линзы. За линзой находится призма, склеенная из двух стекол с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  ( $n_1 > n_2$ ). Ось линзы

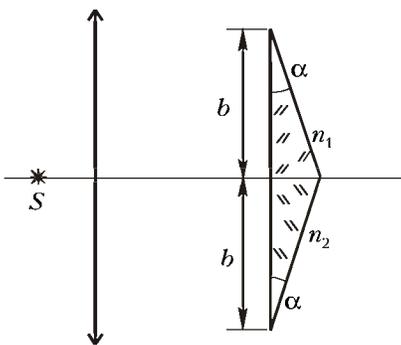


Рис. 5

проходит по границе раздела стекол и перпендикулярна к передней грани призмы (рис.5). Размер передней грани призмы  $2b$  меньше диаметра линзы. Преломляющие углы призмы малы:  $\alpha \ll 1$  рад. Найдите максимальное число интерференционных полос, которые можно наблюдать на экране, расположенном перпендикулярно оси линзы за призмой.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Автомобиль трогается с места с ускорением  $a_1 = 2 \text{ м/с}^2$ . При скорости  $v = 50 \text{ км/ч}$  ускорение автомобиля стало равным  $a_2 = 1 \text{ м/с}^2$ . С какой установившейся скоростью  $v_0$  будет двигаться автомобиль, если сила сопротивления пропорциональна скорости? Силу тяги двигателя при движении автомобиля считать постоянной.

2. Маленькое тело соскальзывает без начальной скорости по внутренней поверхности полусферы с высотой,

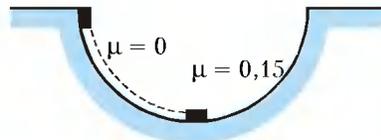


Рис. 6

равной ее радиусу (рис.6). Одна половина полусферы абсолютно гладкая, а другая – шероховатая, причем на этой половине коэффициент трения между телом и поверхностью  $\mu = 0,15$ . Определите ускорение  $a$  тела в тот момент, как только оно перейдет на шероховатую поверхность. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

3. На двух гвоздях, вбитых в стену в точках  $A$  и  $B$  (рис.7), повешена веревка. Расстояние между гвоздями

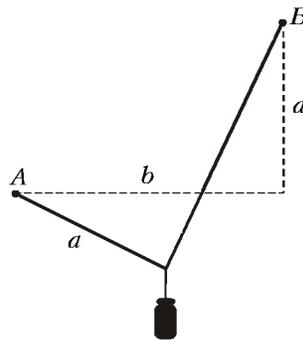


Рис. 7

по горизонтали  $b = \sqrt{3} \text{ м} \approx 1,73 \text{ м}$ , разность высот, на которых вбиты гвозди,  $a = 1 \text{ м}$ , длина веревки равна  $a + b$ . На веревке на расстоянии  $a$  от точки  $A$  подвешивают груз, который не касается стены. Найдите отношение  $\alpha$  сил натяжения веревки слева и справа от груза. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Веревку считать невесомой и нерастяжимой.

4. В лифте, движущемся с ускорением, равным  $a = 5 \text{ м/с}^2$  и направленным вверх, находится цилиндрический сосуд, закрытый поршнем массой

$M = 20 \text{ кг}$  и площадью  $S = 100 \text{ см}^2$ . Под поршнем находится идеальный газ. Поршень расположен на расстоянии  $h = 22 \text{ см}$  от дна сосуда. Определите, на какую величину  $\Delta h$  переместится поршень, если лифт будет двигаться с тем же по модулю ускорением, но направленным вниз. Температура газа не изменяется. Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Трением поршня о стенки сосуда пренебречь.

5. В закрепленном под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту цилиндре может без трения двигаться поршень массой  $M = 10 \text{ кг}$  и площадью  $S = 50 \text{ см}^2$  (рис.8).

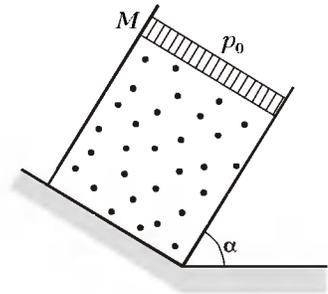


Рис. 8

Под поршнем находится одноатомный идеальный газ. Газ нагревают так, что поршень перемещается на расстояние  $l = 5 \text{ см}$ . Какое количество теплоты  $Q$  было сообщено газу? Атмосферное давление  $p_0 = 10^5 \text{ Па}$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

6. Два удаленных друг от друга на большое расстояние металлических шара радиусами  $r_1 = 5 \text{ см}$  и  $r_2 = 10 \text{ см}$ , несущие заряды  $q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$  и  $q_2 = -10^{-9} \text{ Кл}$  соответственно, соединяют тонким проводом. Какой заряд  $q$  протечет при этом по проводу?

7. Два маленьких шарика массами  $m_1 = 6 \text{ г}$  и  $m_2 = 4 \text{ г}$ , несущих заряды  $q_1 = 10^{-6} \text{ Кл}$  и  $q_2 = -5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$  соответственно, удерживают на расстоянии  $l = 2 \text{ м}$  друг от друга. В некоторый момент оба шарика отпускают, сообщив второму скорость  $v_0 = 3 \text{ м/с}$ , направленную от первого шарика вдоль линии, соединяющей их центры (рис.9). На какое максимальное расстояние  $L$  разойдутся шарика друг от друга? Силу тяжести не учитывать. Электрическую

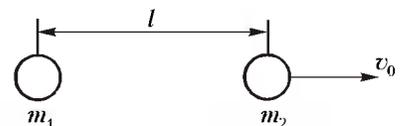


Рис. 9

## Химический факультет

постоянную принять равной  $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi) \text{ Ф/м}$ .

8. Катушка индуктивностью  $L = 3 \text{ мГн}$  подключена к двум последовательно соединенным конденсаторам (рис.10). Конденсатор емкостью  $C_1 = 10^{-7} \text{ Ф}$  вначале заряжен до напряжения  $U = 150 \text{ В}$ , а конденсатор емкостью  $C_2 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ Ф}$  разряжен. Чему

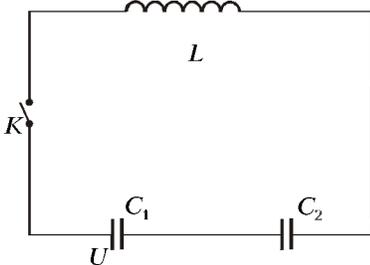


Рис. 10

будет равна максимальная сила тока  $I_{\text{max}}$  в этой цепи после замыкания ключа  $K$ ?

9. Две призмы с одинаковыми углами при вершине  $\alpha = 5^\circ$ , но имеющие разные показатели преломления, плотно прижаты друг к другу и расположены, как показано на рисунке 11. При

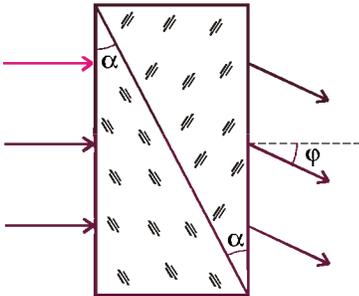


Рис. 11

освещении призм параллельным пучком света, падающим нормально на переднюю грань системы, оказалось, что вышедший из нее пучок отклонился от первоначального направления на угол  $\varphi = 3^\circ$ . Найдите разность  $\Delta n$  показателей преломления материалов призм. При расчетах положить  $\sin \alpha = \alpha$  и  $\sin \varphi = \varphi$ .

10. Точечный источник света расположен на главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 20 \text{ см}$ . По другую сторону линзы на расстоянии  $b = 80 \text{ см}$  от нее находится экран, перпендикулярный ее главной оптической оси. Известно, что если переместить экран на расстояние  $a = 40 \text{ см}$  в сторону линзы, то размер пятна света, создаваемого источником на экране, не изменится. Определите расстояние  $d$  от источника света до линзы.

1. Два груза одинаковой массы  $m = 0,5 \text{ кг}$  связаны легкой нитью и движутся вертикально вверх под действием силы  $F$ , приложенной к одному из грузов. Нить обрывается при величине силы  $F_1 \geq 20 \text{ Н}$ . При какой силе  $F_2$  разорвется нить, если нижний груз закрепить?

2. При выстреле из пушки вылетает снаряд, скорость которого направлена под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Пушка за счет отдачи откатывается в горизонтальном направлении с начальной скоростью  $v = 0,5 \text{ м/с}$ . Масса пушки без снаряда  $M = 800 \text{ кг}$ . Найдите изменение импульса  $\Delta p$  системы пушка – снаряд в результате такого выстрела. Трением пренебречь.

3. Двое рабочих должны выкопать колодец глубиной  $H = 8 \text{ м}$ . До какой глубины  $h$  следует копать первому рабочему, чтобы работа оказалась распределенной поровну? Сечение колодца одинаково по глубине. Принять  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

4. В двух баллонах объемами  $V_1 = 25 \text{ л}$  и  $V_2 = 50 \text{ л}$  находится влажный воздух при одной и той же температуре. Относительная влажность воздуха в первом баллоне  $\varphi_1 = 40\%$ , а во втором  $\varphi_2 = 20\%$ . Какой будет относительная влажность  $\varphi$ , если баллоны соединить трубкой и дождаться установления равновесия? Температуру считать постоянной.

5. Рабочим телом тепловой машины является один моль одноатомного идеального газа. Циклический процесс работы машины представлен на рисунке 12. Он состоит из адиабатного

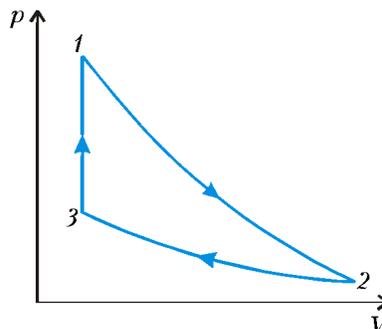


Рис. 12

расширения  $1-2$ , изотермического сжатия  $2-3$  и изохорного процесса  $3-1$ . При этом ее КПД  $\eta = 20\%$ , а работа, совершаемая над газом в процессе изотермического сжатия,  $A = 25 \text{ Дж}$ . Найдите разность  $\Delta T$  максимальной и минимальной температур газа в цикле. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

6. Параллельно отклоняющим пластинам электронно-лучевой трубки влетает поток электронов, движущихся со скоростью  $v_0 = 6 \cdot 10^6 \text{ м/с}$ . Через промежуток времени  $\tau = 5 \cdot 10^{-10} \text{ с}$  их скорость оказывается равной  $v = 1 \cdot 10^7 \text{ м/с}$ . Считая, что поле между пластинами однородно, определите по этим данным его напряженность. Удельный заряд электрона  $e/m = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$ .

7. К клеммам источника постоянного тока, замкнутого на нагрузку с сопротивлением  $R = 8 \text{ Ом}$ , подключен конденсатор. Если конденсатор включить в эту цепь последовательно, то заряд на его обкладках окажется больше в  $k = 1,5$  раза. Найдите внутреннее сопротивление источника  $r$ .

8. Протон, ускоренный электрическим полем, попадает в магнитное поле и движется по дуге окружности радиусом  $R = 0,3 \text{ м}$ . При этом вектор скорости протона изменяет свое направление, поворачиваясь на угол  $\Delta\varphi = 45^\circ$  за время  $\Delta t = 10^{-7} \text{ с}$ . Найдите ускоряющую разность потенциалов  $U$ . Заряд протона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ , его масса  $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .

9. Оптическая сила линзы  $D = +12,5 \text{ дптр}$ . На каком расстоянии  $d$  от линзы надо поместить предмет, чтобы увидеть изображение, увеличенное в  $\Gamma = 4$  раза?

10. Катод фотоэлемента облучается монохроматическим светом с длиной волны  $\lambda = 400 \text{ нм}$ . Энергия светового потока, падающего на катод за время  $\Delta t = 10 \text{ с}$ , равна  $W = 0,15 \text{ Дж}$ . Определите силу тока насыщения  $I$  фотоэлемента при таком освещении. Заряд электрона  $e = 10^{-19} \text{ Кл}$ . Постоянная Планка  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ .

Публикацию подготовили  
П.Бородин, В.Воронин,  
Н.Григоренко, Е.Григорьев,  
И.Ломов, Г.Медведев, В.Погожев,  
В.Разгулин, И.Сергеев, А.Склянкин,  
В.Ушаков, С.Чесноков, Е.Шикли,  
Б.Щедрин

**Конкурс «Математика 6–8»**

(см. «Квант» №4 за 2000 г.)

1. Из рисунка 1 видно, что  $\angle A_1LB_1 = 45^\circ$ ,  $\angle KLM = 45^\circ$ . Из рисунка также следует, что  $\angle AKL = 45^\circ$  и  $\angle LMB = 45^\circ$ . (В силу симметрии задачи точки  $B_1, L_2, A, L, B, L_1, A_1$  располагаются в вершинах правильного восьмиугольника.)

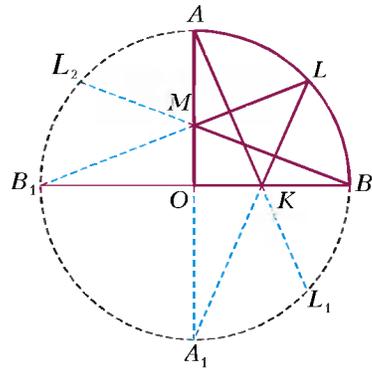


Рис. 1

2. Нельзя. Задача решается стандартным методом инварианта, а именно – поиском ответа на вопрос: что не меняется при указанной операции? Попробовав и то, и другое, в конечном счете можно заметить, что сумма квадратов всех чисел не изменяет-

ся. В самом деле:

$$\left(\frac{3A-4B}{5}\right)^2 + \left(\frac{4A+3B}{5}\right)^2 = A^2 + B^2.$$

Если в результате все числа (их количество равно 21) стали равны некоторому  $X$ , то, учитывая неизменность суммы квадратов, получаем

$$21X^2 = (-10)^2 + (-9)^2 + \dots + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + \dots + 10^2 = 770,$$

откуда

$$X = \sqrt{\frac{770}{21}} = \sqrt{\frac{110}{3}}$$

– число иррациональное. В то же время ясно, что при указанных преобразованиях все числа остаются рациональными. Противоречие показывает, что добиться уравнивания всех чисел невозможно.

3. Верно. Пусть основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки  $O$  на стороны четырехугольника  $ABCD$ , являются точки  $M, N, K$  и  $E$  (рис.2). Рассмотрим точку  $O_1$  пересечения отрезков  $MK$  и  $NE$ . Если  $ABCD$  отличен от параллелограмма, то по неравенству треугольника следует, что сумма расстояний до сторон четырехугольника от точки  $O$

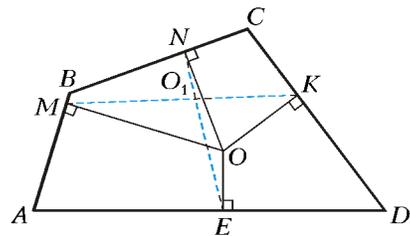


Рис. 2

больше, чем  $MK + NE$ . Значит, она больше, чем сумма расстояний до сторон от точки  $O_1$ . Получили противоречие с условием задачи. Если же четырехугольник  $ABCD$  – параллелограмм, то сумма расстояний от

любой точки внутри него до всех его сторон постоянна и равна  $(a+b)\sin \alpha$ , где  $a, b$  – длины сторон параллелограмма, а  $\alpha$  – один из его углов.

4. Не может. Допустим противное:  $n^2 + n + 1 = m^2$ , где  $m$  – целое. Но число  $n^2 + n + 1$  заключено между двумя последовательными квадратами натуральных чисел:  $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$ , поэтому оно не может равняться квадрату целого числа.

5. Будем говорить, что каждый участок контролирует свой перекресток и все соседние с ним перекрестки. Пусть  $n$  – наименьшее число участков, которые можно разместить в городе при заданных условиях,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  – перекрестки, на ко-

торых установлены участки,  $d_i$  – число перекрестков, соседних с перекрестком  $v_i$ . Участки в сумме контролируют  $D = (d_1 + 1) + (d_2 + 1) + \dots + (d_n + 1) \leq 7n$  перекрестков, причем, возможно, в эту сумму некоторые перекрестки входят более одного раза. Так как каждый перекресток города контролируется, то  $155 \leq 7n$ . Отсюда  $n \geq 23$ .

**Сколько мест в автобусе и другие задачи**

1. Из условия, что у Асика и Басика вместе на 6 морковок больше, чем у Басика и Васика, следует, что у Асика на 6 морковок больше, чем у Васика. Если бы у Васика было не менее 2 морковок, то у Асика – не менее 8. Тогда бы Басику морковки не достались. Значит, у Васика была одна морковка, у Асика – семь, а у Басика – оставшиеся две.

2. Басик съел более  $42 : 3 = 14$  яблок, причем это количество кратно 3 (так как Асик съел в 3 раза меньше, чем Басик). Но если Басик съел более 15 яблок (а значит, не менее 18), то Асик съел не менее 6, а Васик – не более  $42 - 18 - 6 = 18$ , т.е. не более Басика, а это противоречит условию. Значит, Басик съел 15 яблок, откуда нетрудно определить, что Асик съел 5 яблок, а Васик – 22 яблока.

3. Так как в каждой строке может стоять не более трех шашек, то всего шашек не более  $3 \cdot 6 = 18$ . Так как в каждом столбце стоит не менее двух шашек, то всего стоит не менее  $2 \cdot 8 = 16$  шашек. Значит, на доске может быть расставлено 16, 17 или 18 шашек. Все три варианта возможны (рис.3).

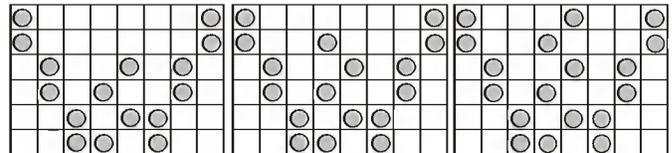


Рис. 3

4. Если на первой остановке вышли 5 человек, то за последующие 14 остановок автобус покинули 90 пассажиров. Пусть водитель открывал обе двери  $k$  раз. Тогда на этих  $k$  остановках вышли  $11k$  человек, а на оставшихся  $(14 - k)$  остановках – не менее  $4(14 - k)$  человек. Поэтому  $11k + 4(14 - k) \leq 90$ , откуда  $k \geq 4$ .

С другой стороны, на оставшихся  $14 - k$  остановках вышли не более  $5(14 - k)$  пассажиров, значит,  $11k + 5(14 - k) \geq 90$ , откуда  $k \geq 4$ .

Получили, что  $k = 4$ , т.е. обе двери открывали 4 раза.

5. Если бы у первого крольчонка было не менее двух наклеек, то у второго – не менее 3, ..., у десятого – не менее 11, т.е. всего не менее  $2 + 3 + \dots + 11 = 65$ , что невозможно. Значит, первому крольчонку досталась одна наклейка, второму – две наклейки, ..., девятому – 9, а десятому – оставшиеся 19 наклеек.

6. Пусть мед заполняет  $x$  пятидесятилитровых бутылей. Из первого условия следует, что объем меда более  $40(x + 4)$  литров, из второго – что он более  $70(x - 5)$  литров. Тогда имеют место неравенства

$$50x > 40(x + 4) \text{ и } 50x > 70(x - 5).$$

Из первого неравенства следует, что  $x > 16$ , из второго – что  $x < 17,5$ , т.е.  $x = 17$ . Отсюда общий объем меда – 850 литров.

7. Наибольшее натуральное число, квадрат которого записывается тремя цифрами, это 31. Значит, число Совы не более 26. Наименьшее натуральное число, куб которого имеет 5 цифр, это 22. Значит, число Совы не менее 26. Таким образом, число Совы равно 26.

**Калейдоскоп «Кванта»**

*Вопросы и задачи*

- Для удержания щетки или палки нужно при их отклонении успевать двигать пальцем так, чтобы они вновь оказывались в положении равновесия. Щетка будет отклоняться медленнее, чем палка той же длины, так как центр тяжести щетки лежит выше центра тяжести палки.
- В равновесии масса груза  $C$  в два раза больше массы груза  $B$ . При смещении точки  $A$  вправо равновесие нарушится – груз  $C$  будет опускаться, а груз  $B$  – подниматься.
- Равновесие шарика устойчиво к малым возмущениям и неустойчиво к большим.
- Если  $h \geq l_0$ , в точке  $O$  – устойчивое положение равновесия (ему соответствует минимум потенциальной энергии пружины). Если  $h < l_0$ , в точке  $O$  – неустойчивое положение равновесия (максимум потенциальной энергии пружины), но слева и справа на равных расстояниях от точки  $O$  имеются два устойчивых положения равновесия, соответствующих недеформированному состоянию пружины.
- Хвост обеспечивает устойчивость змея относительно вращений около вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести.
- При малейшем отклонении доски от вертикали момент выталкивающей силы относительно центра тяжести доски увеличивает отклонение доски, и она опрокидывается в устойчивое горизонтальное положение.
- Да. Это достигается выбором формы сечения корабля, когда центр давлений смещается в сторону крена.
- Шарообразная форма пузырьков отвечает минимуму энергии поверхностного натяжения жидкости.
- Энергия поверхностного натяжения жидкого цилиндра больше, чем энергия капель, которые могут из него образоваться.
- Поверхность одной большой капли меньше, чем суммарная поверхность нескольких маленьких капель с той же общей массой. Значит, и энергия поверхностного натяжения у большой капли меньше.
- Система пар – жидкость находится в термодинамическом равновесии, т.е. температуры отдельных ее частей равны.
- Да. Причем при движении вдоль прямой  $x$ , если  $qQ < 0$ , равновесие в точке  $O$  неустойчивое, если  $qQ > 0$ , равновесие устойчивое. При движении вдоль прямой  $y$  условия меняются местами.
- Радиоактивные ядра нестабильны по своей природе и «обречены» на гибель уже в момент своего рождения.
- Нет. Например при  $\gamma$ -распаде заряд ядра не меняется, поэтому не меняются и химические свойства вещества.

*Микроопыт*

После прокалывания пленки в петле оставшаяся часть мыльной пленки будет стремиться уменьшить свою поверхность, иначе говоря, дырка должна образовать фигуру максимальной площади. Такой фигурой будет круг.

**Законы сохранения в задачах на столкновения**

- $\beta > M / (M - m_p) = 7/6$ , где  $M$  – масса ядра лития, а  $m_p$  – масса протона.
- $E_{\text{нпр}} = 3E_\alpha / 4 = 10,2$  эВ.    3.  $\Delta\lambda = h / (mc) = 2,42 \cdot 10^{-12}$  м.

**Московский государственный университет**

**МАТЕМАТИКА**

*Вариант 1*

- $(3; 4) \cup (4; 7)$ . *Указание.* Умножим левую и правую части на положительное при всех  $x$  выражение  $\frac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|}$ .

После упрощений получим равносильную систему

$$2|x-4| < |x-1|, \quad x \neq 5/2, \quad x \neq 4,$$

решаемую стандартным образом.

- $-\frac{3}{14}\sqrt[4]{51}$ . *Указание.* Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_7$  – убывающая арифметическая прогрессия,  $d < 0$  – ее разность, причем

$$a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_7^5 = 0.$$

Докажите, что  $a_4 = 0, a_5 = -a_3 = d, a_6 = -a_2 = 2d, a_7 = -a_1 = 3d$ .

- $-23\pi/6, -19\pi/6, -11\pi/6, -4 \arccos(-9/10)$ . *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \left(\cos \frac{x}{4} + \frac{9}{10}\right) = 0.$$

20. Из условия задачи получаем (рис.4)  $S_{CKL} : S_{DKL} = CL : LD = 1 : 5$ . Поскольку  $S_{BKLC} : S_{AKLD} = 1 : 5$ , то

$$\frac{S_{BKC}}{S_{AKD}} = \frac{S_{BKLC} - S_{CKL}}{S_{AKLD} - S_{DKL}} = \frac{1}{5}.$$

В треугольниках  $BKC$  и  $AKD$  высоты, опущенные из вершины  $K$ , равны. Поэтому  $BC : AD = 1 : 5$ .

Из точек  $C$  и  $D$  опустим перпендикуляры  $CC'$  и  $DD'$  на прямую  $AB$ . Из подобия треугольников  $BCC'$  и  $ADD'$  имеем

$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{5}.$$

С другой стороны, по теореме о пропорциональных отрезках на сторонах угла

$$\frac{C'K}{D'K} = \frac{CL}{LD} = \frac{1}{5}.$$

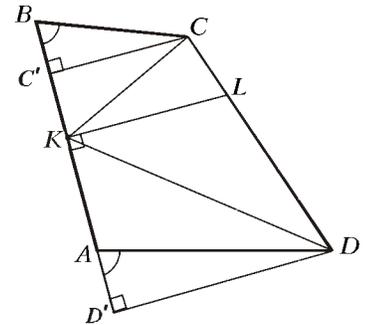


Рис. 4

Отсюда прямоугольные треугольники  $CC'K$  и  $DD'K$  подобны с коэффициентом  $\frac{1}{5}$ , и  $DK = 5 CK = 5 \cdot 4 = 20$ .

- $1, \frac{5}{2}$ . *Указание.* Исходное уравнение равносильно совокупности из двух уравнений

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a + \frac{8}{5}\right], \tag{1}$$

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} - 2\right]. \tag{2}$$

Если число  $x_0$  является решением уравнения (1), то число  $a - x_0$  также является решением этого уравнения. Если оба решения – целые, то и  $a$  должно быть целым. С другой стороны, корни уравнения (2) тоже парные:  $x_1$  и  $a - \frac{1}{2} - x_1$ , и их целочисленность приводит к условию  $a - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$ . Таким образом, требование задачи равносильно совокупности следующих условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{все корни уравнения (1) – целые,} \\ a \in \mathbf{Z}, \\ \text{уравнение (2) не имеет решений;} \\ \text{все корни уравнения (2) – целые,} \\ a - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}, \\ \text{уравнение (1) не имеет решений.} \end{array} \right. \tag{3}$$

Поскольку при  $A > 0$  и  $t > 0$  выполняется неравенство

$$t + \frac{A}{t} \geq 2\sqrt{A},$$

условия разрешимости уравнений (1) и (2) имеют, соответственно, вид

$$\frac{3}{5} \left(\frac{3}{2}\right)^a + \frac{8}{5} \geq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{a}{2}};$$

$$4 \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} - 2 \geq 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{a-\frac{5}{2}}.$$

Решая эти неравенства и учитывая, что корни второго уравнения должны быть положительны, получаем условия

- 1)  $a \leq 2 \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}$ ;  $a \geq 2 \log_{\frac{3}{2}} 2$ ;
- 2)  $a \geq \frac{5}{2}$ .

Рассмотрим первую систему из совокупности (3). Из условий 1) и 2) находим «подозрительные» значения  $a$  — это  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $a \leq 0$  и  $a = 1$ . Для  $a = 1$  условия задачи выполняются, для  $a \leq 0$  — нет (докажите это, сравнивая левую и правую части уравнения (1) при целых  $x$  и  $a - x$ ). Второй системе из совокупности (3) удовлетворяет лишь  $a = \frac{5}{2}$ .

**6. 2. Указание.** Пусть  $\alpha$  — плоскость, проходящая через центр сферы и перпендикулярная хорде  $PP_1$ . Эта плоскость делит пополам хорду  $PP_1$ , а также параллельные ей хорды  $QQ_1$ ,  $RR_1$  и  $SS_1$ . Следовательно,  $P_1Q_1R_1S_1$  — квадрат со стороной  $25/4$ , симметричный квадрату  $PQRS$  относительно плоскости  $\alpha$ .

Пусть  $SS_1 = 2x$ , т.е.  $x$  — расстояние от точки  $S$  до плоскости  $\alpha$ . Спроектируем все точки на координатную прямую  $l$ , перпендикулярную  $\alpha$ . Пусть сама плоскость  $\alpha$  проектируется в начало координат на  $l$ , а направление на оси  $l$  выбрано так, что координата  $\pi(Q)$  проекции точки  $Q$  равна 5. Тогда  $\pi(Q_1) = -5$ ,  $\pi(P) = -\pi(P_1) = \pm 1$ ,  $\pi(R) = -\pi(R_1) = \pm 3$ ,  $\pi(S) = -\pi(S_1) = \pm x$ . Координату проекции точки  $A$  — центра квадрата  $PQRS$  — можно вычислить двумя способами:

$$\pi(A) = \frac{\pi(P) + \pi(R)}{2} = \frac{\pi(Q) + \pi(S)}{2} \Leftrightarrow \frac{\pm 1 \pm 3}{2} = \frac{5 + \pi(S)}{2}.$$

Таким образом, возможны четыре случая:

	$\pi(P)$	$\pi(Q)$	$\pi(R)$	$\pi(S)$
1.	1	5	3	-1
2.	1	5	-3	-7
3.	-1	5	-3	-9
4.	-1	5	3	-3.

Покажем, что случаи 2, 3 и 4 невозможны. Например, в случае 2 отрезки  $SQ$  и  $S_1Q_1$  длины  $25/4$  оказываются диагоналями трапеции  $S_1QQ_1S$  (рис.5). Но

$$QS + Q_1S_1 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} < 14 = SS_1,$$

что невозможно. Аналогично докажете невозможность случая

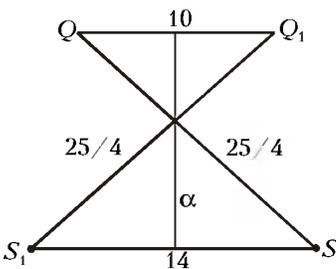


Рис 5

3. В случае 4 рассмотрите параллелограмм  $KLMN$ , образованный серединами отрезков  $PP_1$ ,  $QQ_1$ ,  $RR_1$  и  $SS_1$  соответственно, вычислите его стороны и диагональ  $KM$  и докажите, что  $KM > KL + LM$ , что противоречит неравенству треугольника.

В оставшемся случае 1 получаем  $SS_1 = 2|\pi(S)| = 2$ .

Вариант 2

1.  $\left[0; \log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}\right) \cup \left(\log_{\frac{3}{2}} \frac{4}{3}; 1\right]$ . 2. (5/8; 4).

3. а) 6; б) 192.

а) Первый автобус появляется в пункте  $B$  в моменты времени

$$t_n = \frac{2}{51} + \frac{4}{51} \cdot n,$$

где  $n \in \mathbf{Z}$ , причем  $t_n \leq 8$ , откуда  $n \leq 101$ . Второй автобус появляется в пункте  $B$  в моменты времени  $s_k = \frac{4}{42} \cdot k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Встреча автобусов в пункте  $B$  означает равенство  $t_n = s_k$ , т.е.

$\frac{2}{51} + \frac{4}{51}n = \frac{4}{42}k$ , или  $7(1+2n) = 17k$ . Последнее равенство выполняется только тогда, когда нечетное число  $1+2n$  делится на 17, т.е.  $1+2n = 17, 51, 85, 119, 153, 187, 221, \dots$  Поскольку  $0 \leq n \leq 101$ , должно быть  $1 \leq 1+2n \leq 203$ , так что подходят только первые шесть чисел, причем для всех них  $k = 7 \cdot \frac{1+2n}{17}$  — целое. Таким образом, в пункте  $B$  было 6 встреч.

б) При каждом прохождении отрезка  $AB$  первый автобус ровно 1 раз оказывается в одной точке  $X \in AB$  со вторым автобусом: либо в момент встречи, либо в момент обгона, причем в случае  $X = A$  или  $X = B$  в точке  $X$  происходят и встреча, и обгон одновременно. Поэтому число совпадений положений автобусов строго между пунктами  $A$  и  $B$  равно числу прохождений первым автобусом отрезка  $AB$  ( $\frac{51}{2} \cdot 8 = 204$  раза) минус удвоенное суммарное число встреч в точках  $A$  и  $B$ .

Число встреч в пункте  $B$  равно 6 (см. п.а)). В пункте  $A$  первый автобус появляется в моменты времени  $\frac{4}{51} \cdot n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , а второй автобус — в моменты времени  $\frac{2}{42} + \frac{4}{42} \cdot k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , причем встреча в пункте  $A$  означает равенство  $28n = 17(1+2k)$ , что невозможно.

4.  $CE = 6$ ,  $OA = 2$ . Проведем общую касательную  $FG$  к окружностям в точке  $A$  (рис.6). Углы  $\angle DBA$  и  $\angle FAB$  равны как опирающиеся на одну дугу,  $\angle FAB = \angle CAG$ , углы  $\angle CAG$  и  $\angle CEA$  равны как опирающиеся на одну дугу. Таким образом, треугольники  $CBE$  и  $CEA$  подобны по двум углам, откуда

$$\frac{BC}{CE} = \frac{CE}{AC} \Rightarrow CE = \sqrt{BC \cdot AC} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

Далее,  $\angle BAD = 180^\circ - \angle DAC = \angle CEB = \angle CAE$  (последнее равенство следует из доказанного выше подобия треугольников  $CBE$  и  $CEA$ ),

так что луч  $AB$  является биссектрисой угла между лучом  $AD$  и продолжением луча  $EA$  за точку  $A$ . Следовательно, центр  $O$  окружности, о которой идет речь во втором вопросе задачи, лежит на отрезке  $AB$ . Поскольку  $O$  лежит и на биссектрисе угла  $\angle BDA$ , по свойству биссектрисы и из подобия  $\triangle BDA \sim \triangle BCE$

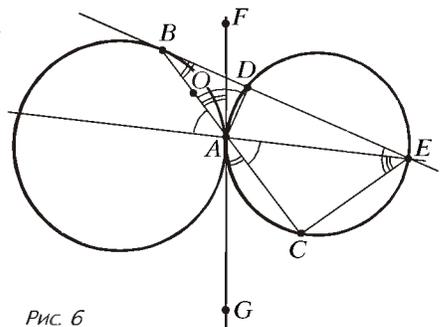


Рис 6

$$\frac{OB}{OA} = \frac{BD}{AD} = \frac{BC}{CE} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Отсюда

$$OA = \frac{2}{5} AB = 2.$$

5.  $[0; 1) \cup (1; 2] \cup \{3\}$ . *Указание.* Пусть  $A = |a| - 1$ ,  $B = 1 - |a - 2|$ . Запишем уравнение в виде

$$A \cos 2x + B \sin 2x = -B \cos x + A \sin x.$$

Если  $a = 1$ , то  $A = B = 0$ , и все  $x \in (-\pi; \pi)$  являются решениями. Если  $a \neq 1$ , то  $A^2 + B^2 > 0$ , и уравнение можно записать так:

$$\cos(2x - \varphi) = \cos\left(x - \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

где

$$\begin{cases} \cos \varphi = A / \sqrt{A^2 + B^2}, \\ \sin \varphi = B / \sqrt{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

Исходное уравнение, тем самым, равносильно совокупности

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, & n \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{2\varphi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} k, & k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Первая строка этой совокупности дает одну фиксированную точку на тригонометрической окружности, а вторая строка — три зависящие от  $\varphi$  точки, дуги между которыми все равны по  $120^\circ$ . Число всех решений на дуге  $(-\pi; \pi)$  будет нечетным только в тех случаях, когда одна из этих трех точек совпадает либо с  $\pi$  (или, что то же, с  $-\pi$ ), либо с  $-\frac{\pi}{2}$ . Но тогда либо  $A = B \neq 0$ , либо  $B = 0 \neq A$ .

6.  $\sqrt{38}$ . *Указание.* Докажите, что суммы квадратов площадей

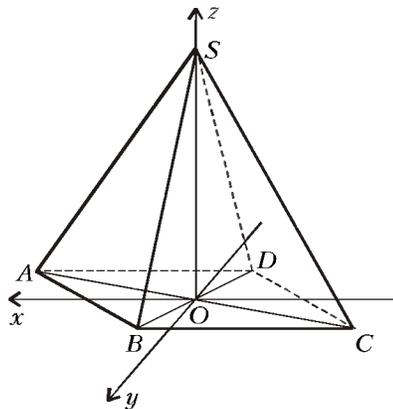


Рис. 7

противоположных граней пирамиды равны. Для этого введите прямоугольную систему координат: точка  $O$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  — начало системы координат, ось  $Oz$  направим по лучу  $OS$ , ось  $Ox$  — перпендикулярно  $Oz$  в плоскости  $ASC$ , ось  $Oy$  — перпендикулярно  $Oz$  в плоскости  $BSD$  (рис. 7). Вершины пирамиды получат следующие координаты:  $S(0; 0; h)$ ,

$A(a; 0; c)$ ,  $C(-a; 0; -c)$ ,  $B(0; b; d)$ ,  $D(0; -b; -d)$ , так как точка  $A$  симметрична точке  $C$ , а точка  $B$  — точке  $D$  относительно начала координат  $O$ .

Найдите длины ребер пирамиды, а затем по формуле Герона вычислите площади граней  $ASB$ ,  $ASD$ ,  $BSC$  и  $CSD$  и убедитесь в том, что

$$S_{ASB}^2 + S_{DSC}^2 = S_{ASD}^2 + S_{BSC}^2.$$

**Вариант 3**

1.  $(-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [5; +\infty)$ . 2.  $\{0; \log_3 2\}$ .

3.  $\left[ 2 \arctg \frac{1 + \sqrt{65}}{16}; \frac{\pi}{3} \right)$ . *Указание.* Исходное неравенство рав-

носьливо системе

$$\begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0, \\ 6 - 10 \cos x - \sin x \geq 0, \\ 2 \cos x > 1. \end{cases}$$

которая с помощью универсальной подстановки  $t = \tg \frac{x}{2}$  превращается в систему квадратных неравенств.

4.  $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ . *Указание.* Пусть  $O$  — точка пересечения  $MN$  и  $CD$  (рис. 8),  $\alpha = \angle ACD$ ,  $\beta = \angle DCB$ ,  $MC = x$ ,  $NC = y$ . Тогда, поскольку  $\alpha + \beta = 120^\circ$  и  $3 \sin \alpha = 4 \sin \beta$ , получим

$$\tg \alpha = 2\sqrt{3}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}, \sin \beta = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.$$

Выражая двумя способами площадь треугольника  $MCO$ , имеем после упрощений

$$\begin{cases} xy = 12, \\ 4x + 3y = 24, \end{cases} \text{ т.е. } x = 3, y = 4.$$

Далее, вычислив  $S_{MCO}$ , получим

$$S_{\Delta MCO} = \frac{1}{2} \cdot S_{\Delta MCN},$$

откуда  $S_{\Delta MCO} = S_{\Delta CON}$ , следовательно,  $MO = ON$ , значит,  $MCND$  — параллелограмм. Таким образом,  $AC \parallel DN$ ,  $MD \parallel BC$ , поэтому треугольник  $AMD$  подобен треугольнику  $DNB$ , причем из условия задачи следует, что коэффициент подобия равен 2. Поэтому  $AM = 2DN = 2CM = 6$ ,  $NB = \frac{MD}{2} = \frac{CN}{2} = 2$ ,  $AC = 9$ ,  $BC = 6$  и  $S_{\Delta ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$ .

5.  $\begin{cases} x = \frac{a-3}{4}, \\ y = \log_2(15a^2 - 26a + 7) - 2 \end{cases}$  при  $a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$ ;

$\begin{cases} x = -\frac{a+1}{2}, \\ y = 1 + \log_2(4a - 3a^2 - 1) \end{cases}$  при  $a \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ;

$\begin{cases} x = 1 - a, \\ y = 1 + \log_2(12a - 5a^2 - 7) \end{cases}$  при  $a \in \left(1; \frac{7}{5}\right)$ ;

$\begin{cases} x = b, \text{ где } b \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty), \\ y = \log_2(4b^2 + (14a - 10)b + 8a - 8) \end{cases}$  при  $a = 1$ ;

нет решений при  $a = \frac{1}{3}; \frac{7}{5}$ . *Указание.* После замены

$$u = \log_2(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8),$$

$$v = \log_2|4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4|$$

исходная система переписывается в виде

$$\begin{cases} y^2 - 3yu + 2v^2 = 0, \\ 5y^2 - 8yv + 3u^2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что  $y = u = v = 0$  – ее решение. При  $y \neq 0$  введем переменные  $p = \frac{u}{y}$ ,  $q = \frac{v}{y}$ . Тогда

$$\begin{cases} 2q^2 - 3p + 1 = 0, \\ 3p^2 - 8q + 5 = 0, \end{cases}$$

откуда  $p = q = 1$ .

Итак,  $y = u = v$  (в частности, последнему соотношению удовлетворяет найденное выше нулевое решение  $y = u = v = 0$ ). Таким образом, задача сводится к решению при всех значениях параметра  $a$  уравнения

$$\begin{aligned} \log_2(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8) = \\ = \log_2[4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4], \end{aligned}$$

равносильного системе

$$\begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = [2x^2 + (3 - a)x + 2a^2 - 4a + 2], \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть 2 случая:

$$1) \begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = 2x^2 + (3 - a)x + 2a^2 - 4a + 2, \end{cases}$$

и

$$2) \begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = -2x^2 - (3 - a)x - 2a^2 + 4a - 2. \end{cases}$$

6.  $50(5\sqrt{2} \pm 4)$ . *Указание.* Из точки  $O$  каждая из сторон треугольника  $ABC$  видна под прямым углом, т.е. точка  $O$  – вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а треугольник  $ABC$  получается сечением этого угла некоторой плоскостью.

Треугольник  $ABC$  – остроугольный. Найдем сторону  $AC$ . Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle BCA = \beta$ . По теореме синусов

$$\frac{20}{\sin \alpha} = \frac{15\sqrt{2}}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = 10\sqrt{5}.$$

Отсюда  $AC = 5\sqrt{10}$ , а  $S_{\triangle ABC} = 150$ .

Пусть  $OK$  – перпендикуляр, опущенный из  $O$  на плоскость  $ABC$ ,  $h$  – его длина,  $OA = x$ ,  $OB = y$ ,  $OC = z$ . Из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 450, \\ y^2 + z^2 = 400, \\ x^2 + z^2 = 250. \end{cases}$$

находим, что  $x^2 y^2 z^2 = 150 \cdot 300 \cdot 100$ , а из формулы для объема пирамиды  $OABC$  находим  $h = 5\sqrt{2}$ .

Далее, трехгранный угол, образованный лучами  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , отсекает из четвертой сферы с радиусом  $r$  и центром  $O$

одну восьмую ее часть. Тогда

$$\frac{4\pi r^2}{8} = 8\pi, \text{ т.е. } r = 4.$$

Так как вершина  $S$  пирамиды искомого объема является точкой касания четвертой сферы с плоскостью, параллельной  $ABC$ , то для высоты  $H$  пирамиды  $SABC$  имеем либо  $H = h + r$ , либо  $H = h - r$ . Окончательно,  $V_{SABC} = 50(5\sqrt{2} \pm 4)$ .

**Вариант 4**

1.  $\left[-\frac{\pi}{4}; +\infty\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{\pi}{4} - \pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right]\right)$ . 2. 90%.

3.  $(-5; -2 - 2\sqrt{2}) \cup [-4; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$ . *Указание.* Исходное неравенство переписывается в виде

$$\log_{(x+5)(1-x)}((x+5)(1-2x)) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

4.  $\arctg\left(\frac{2}{3}\sqrt{12 \pm 3\sqrt{3}}\right)$ . *Указание.* Пусть  $\angle BAC = \gamma$  (рис.9).

Пусть  $X$  и  $Y$  – точки пересечения прямых  $KL$  и  $KM$  с прямыми  $AB$  и  $AC$  соответственно. Возможны различные случаи расположения точек  $X$  и  $Y$  на прямых  $AB$  и  $AC$  (одна из таких конфигураций изображена пунктиром на рисунке 9). Однако при этом возможны только два варианта значений величины  $\angle XAY$ , а именно:  $\angle XAY = \gamma$  или  $\angle XAY = \pi - \gamma$ . Пусть  $\angle KXA = \alpha$  и  $\angle KYA = \beta$ . Пусть точка  $Z$  – проекция точки  $K$  на прямую  $XY$ . По теореме о трех перпендикулярах  $AZ \perp XY$ , значит,  $\angle KZA = \varphi$  – искомый. Пусть  $KA = a$ , тогда  $AX = a \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $AY = a \operatorname{ctg} \beta$ ,

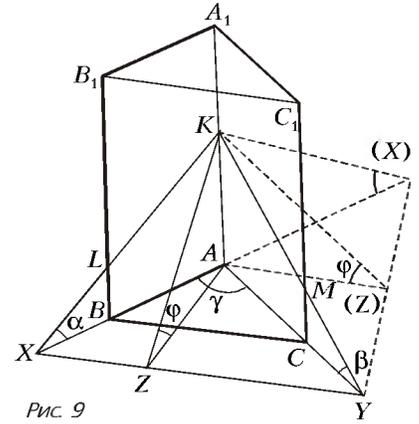


Рис. 9

$$2S_{\triangle XAY} = a^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma.$$

По теореме косинусов

$$XY^2 = a^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta \pm 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \gamma).$$

Следовательно,

$$AZ = \frac{2S_{\triangle XAY}}{XY}.$$

Из треугольника  $KAZ$  получаем выражение для  $\operatorname{tg} \varphi$  через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta \pm 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \gamma}}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \sin \gamma}.$$

Осталось подставить  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$  и  $\gamma = \frac{\pi}{3}$ .

5. 30. Положим  $z = 4x^2 + 80x + y + 43$ . Нахождение максимума  $z$  при заданных условиях эквивалентно определению максимального из значений  $z$ , при которых существует решение системы

$$\begin{cases} 4x^2 + 80x + y + 43 = z, \\ x^2 + 86x + y \geq -202, \\ 6x^2 + 32x + y \leq -283. \end{cases}$$

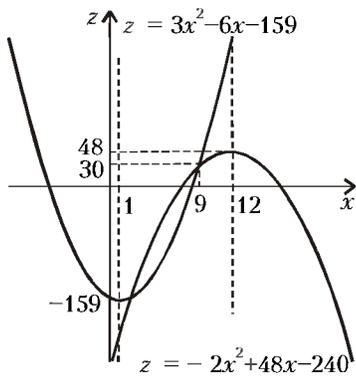


Рис. 10

Исключая  $y$  из уравнения и подставляя в неравенства, имеем

$$\begin{cases} z \geq 3x^2 - 6x - 159, \\ z \leq -2x^2 + 48x - 240. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация на плоскости  $(x, z)$  дает фигуру между двумя параболой (рис.10). Точки пересечения этих парабол:

$$x_1 = \frac{9}{5}; x_2 = 9.$$

Так как вершина параболы  $z = -2x^2 + 48x - 240$  лежит правее отрезка  $\left[\frac{9}{5}; 9\right]$ , то максимальное значение  $z$  достигается в точке  $x = 9$ . Оно равно 30.

6. 2. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы, а  $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей, проходящих через пары точек  $A, C$  и  $B, D$  соответственно (см. рис. 11 и рис. 12),  $O_1O_2 = \rho$  – расстояние между центрами окружностей,  $EF$  – их общая хорда, пересекающая прямую  $O_1O_2$  в точке  $G$ . Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей параллелограмма, а точка  $H$  – проекция  $O$  на прямую  $O_1O_2$ . Пусть  $\Delta$  – расстояние от точки  $O$  до прямой  $EF$ ,  $O_1O = r_1$ ,

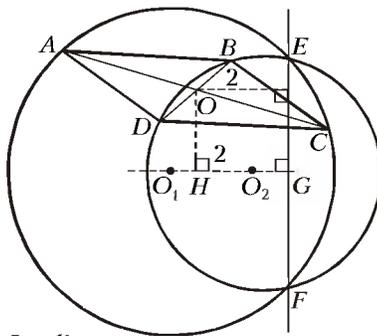


Рис. 11

$O_2O = r_2$ . Пусть  $d_{\max} = \max\{AC, BD\}$ ,  $d_{\min} = \min\{AC, BD\}$ ,  $AC = 2p$  и  $BC = 2q$ . Из свойств хорд получаем, что  $AO \cdot OC = p^2 = R_1^2 - r_1^2$ , аналогично,  $BO \cdot OD = q^2 = R_2^2 - r_2^2$ . Пусть  $O_1G = \rho_1$ ,  $O_2G = \rho_2$ . Очевидно, что  $HG = \Delta$ . Из прямоугольных треугольников  $O_1GE$  и  $O_2GE$  имеем  $GE^2 =$

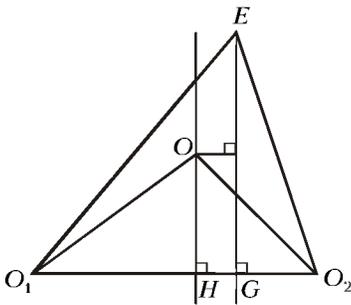


Рис. 12

$= R_1^2 - \rho_1^2 = R_2^2 - \rho_2^2$ , т.е.  $R_2^2 - R_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2$ , или  $r_2^2 - r_1^2 = \rho_2^2 - \rho_1^2 + p^2 - q^2$ . Аналогично, из прямоугольных треугольников  $O_1OH$  и  $O_2OH$  получаем равенство  $r_2^2 - r_1^2 = (\rho_2 - s_2\Delta)^2 - (\rho_1 - s_1\Delta)^2$ , где  $s_1$  равно 1 или -1, если точки  $O$  и  $O_1$  лежат по одну или, соответственно, по разные стороны от прямой  $EG$ , аналогично,  $s_2$  равно 1 или -1, если точки  $O$  и  $O_2$  лежат по одну или, соответственно, по разные стороны от этой же прямой. Отсюда получим  $\rho_2^2 - \rho_1^2 + p^2 - q^2 = (\rho_2 - s_2\Delta)^2 - (\rho_1 - s_1\Delta)^2$ , а после приведения подобных членов  $2\Delta(s_1\rho_1 - s_2\rho_2) = p^2 - q^2$ . Понятно, что  $|s_1\rho_1 - s_2\rho_2|$  – это расстояние между центрами окружностей. Получаем соотношение  $8\rho\Delta = d_{\max}^2 - d_{\min}^2$ . В нашей задаче  $d_{\max} = 6$ ,  $d_{\min} = 2$ ,  $\Delta = 2$ . Поэтому  $\rho = 2$ .

Вариант 5

- $\frac{2\pi n}{7}, \frac{2\pi n}{5}, \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .
- $\log_3^2 5$ .
- $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; +\infty\right)$ .
- $\arccos \frac{4m^2 - a^2 - b^2}{2ab}$ .
- $(1; 5)$ .
- $7/2$ .
- $(0; 1/4) \cup (4; +\infty)$ .

8. 4 : 3. *Указание.* Пусть  $O$  – центр окружности,  $K$  – точка пересечения  $AO$  и  $MN$ ,  $H$  – середина  $BC$ . Из подобия треугольников  $AMK$  и  $AOM$ ,  $APK$  и  $AON$  и соотношения  $AM^2 = AB \cdot AC$  получите, что  $AP \cdot AN = AB \cdot AC$ . Дальнейшее ясно.

Вариант 6

- $\pm \frac{1}{4} \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}$ .
- $(-1 + \sqrt{57})/4$ .
- $(1 - \sqrt{2}; 2/3) \cup (1; 1 + \sqrt{2})$ .
- 102%.
- $[1; \log_3 6]$ .
- $(b^2 - a^2)/b$ .

7.  $[1/2; 1]$ . *Указание.* Данное неравенство имеет единственное решение ( $x = 1$ ) тогда и только тогда, когда наименьший корень квадратного трехчлена  $x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a$  не меньше 1.

8.  $\sqrt{53}$ . *Указание.*

Пусть  $S$  – вершина конуса,  $SD$  – образующая конуса, содержащая точку  $C$ ,  $E$  – точка пересечения прямой  $SA$  с плоскостью основания конуса (рис.13). Проведем через точку  $A$  плоскость, перпендикулярную плоскости основания конуса. Имеем  $OD \perp ED$ , а точка  $B$  – точка пересечения прямых  $AC$  и  $ED$  в плоскости  $SED$ . Пользуясь условием и подобием треугольников, убедитесь, что  $AD_1 = BD$ . Найдите длины отрезков  $SD$  и  $BD$ , а затем и  $SB$  по теореме Пифагора.

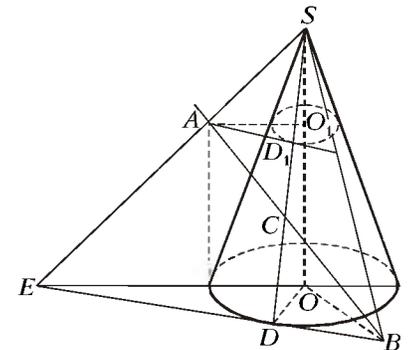


Рис. 13

Вариант 7

- 1.
- $\frac{\pi}{2}(2n+1), \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in \mathbf{Z}$ .
- 11.

4.  $12\pi$ . *Указание.* Пусть  $r_n$  – радиус  $n$ -й окружности. Докажите, что  $r_n$  – геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = (1 + \sin \alpha)/(1 - \sin \alpha)$ , где  $\alpha$  – половина данного угла. Из условия получите, что  $\pi q^6 = 64\pi$ , т.е.  $q = 2$ .

5.  $\frac{1}{3}$ . *Указание.* Пусть  $k = DC_1/DC$ ,  $S = S_{ADB} = S_{ADC} = S_{BDC}$ . Выразите через  $S$  и  $k$  отношение боковых поверхностей пирамид  $DA_1B_1C_1$  и  $DABC$  и получите, что  $k = 1$ , т.е. точки  $C_1$  и  $C$  совпадают. Отношение же объемов пирамид  $DCA_1B_1$  и  $DCAB$  равно отношению площадей треугольников  $DA_1B_1$  и  $DAB$ .

6.  $\pm 1$ . *Указание.* С помощью замены  $y = (2 + \sqrt{3})^x$  приведем уравнение к виду

$$y^4 - 5y^3 + 6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Поделив ( $y \neq 0$ ) уравнение на  $y^2$  и выполнив замену  $t = y + \frac{1}{y}$ , получим квадратное уравнение

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

**Вариант 8**

1.  $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$ .      2.  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$ .  
 3.  $3\sqrt{15}/4$ .      4.  $\left(-6; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; 10\right)$ .

*Указание.* Преобразуйте неравенство с помощью замены  $y = \log_2|x-2|$ .

5.  $a(\sqrt{3}-1)$ . Пусть радиусы первых трех шаров с центрами  $O_1, O_2, O_3$  равны  $R$ . Рассмотрим сечение призмы плоскостью  $O_1O_2O_3$  (рис.14). Сторона основания призмы равна

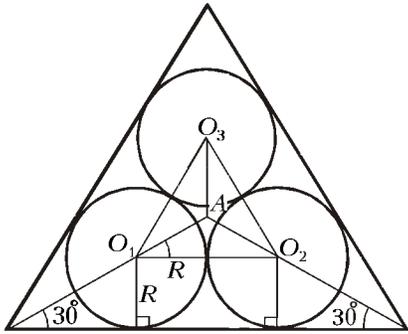


Рис. 14

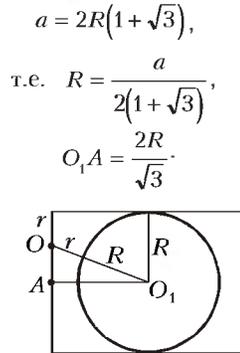


Рис. 15

Радиус  $r$  четвертого шара с центром  $O$  находим из прямоугольного треугольника  $OAO_1$  (рис.15):

$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + \left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2, \text{ откуда } r = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{12}.$$

**Вариант 9**

1.  $(-\infty; 1] \cup (3/2; +\infty)$ .      2. 1; 2.      3.  $24/7$ .  
 4.  $(0; 1) \cup (3; 5)$ .  
 5.  $\pm \sqrt{8 - \left(\frac{(-1)^n}{6} + n\right)^2}$ , где  $n = 0, 1, 2$ . *Указание.* Исходное

уравнение равносильно такому:

$$\pi\sqrt{8-x^2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

где  $n = 0, 1, 2$ . Это следует из неотрицательности левой части и из того, что

$$\pi\sqrt{8-x^2} \leq 2\sqrt{2}\pi < \left(2 + \frac{5}{6}\right)\pi.$$

(Последняя оценка следует из того, что  $12\sqrt{2} < 17$ .)

6.  $1 + \sqrt{3}$ . *Указание.* Найдите углы  $\alpha, \beta, \gamma$  нового треугольника, квадрат радиуса описанной окружности, а затем воспользуйтесь формулой

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

7.  $5/2$ . *Указание.* При  $x = -1/2$  левая часть уравнения равна  $5/2$  независимо от значения  $b$ , так что  $a = \frac{5}{2}$  удовлетворяет условию. Если  $a < \frac{5}{2}$ , то при  $b = \frac{1}{2}$  получаем

$$|x-2| + \frac{1}{2}|2x+1| \geq \left|x-2-x-\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2},$$

а при  $a > \frac{5}{2}$  и  $b = -\frac{1}{2}$  имеем

$$|x-2| - \frac{1}{2}|2x+1| \leq \left|x-2-x-\frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2},$$

так что  $a = 5/2$  – единственное возможное значение  $a$ .

**Вариант 10**

1.  $\left(\frac{4}{5}; 4\right)$ .      2.  $\frac{120}{119}$ .      3.  $\frac{1}{5}$  часа.      4.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}$ .  
 5.  $\{(10; 15); (15; 10)\}$ .      6.  $\frac{3}{2}\sqrt{15}$ .  
 7.  $\left\{0; t; \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}\right\}$ . *Указание.* Приведите уравнение к виду

$$\left(3\sqrt{1-x^2}-1\right)\left((x-1)^2-\sqrt{1-x^2}\right)=0.$$

8.  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}a^2-ab+b^2}-\frac{a}{4}; \frac{b}{a} \in \left[1; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$ . Пусть  $r$  – радиус любого из восьми одинаковых шаров, при этом  $a = 4r, b > a$ . Центры шаров – вершины параллелепипеда с ребрами  $2r; 2r; b-2r$ . Центр девятого шара (радиуса  $R$ ) находится в центре этого параллелепипеда, поэтому

$$R+r = \frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2+(2r)^2+(b-2r)^2},$$

откуда

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4}.$$

Используя ограничение задачи  $R \leq \frac{a}{4}$ , получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3a^2}{4}-ab+b^2}-\frac{a}{4} \leq \frac{a}{4},$$

из которого находим, что

$$1 < \frac{b}{a} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

**Вариант 11**

1.  $(19 + \sqrt{137})/8$ . *Указание.* Выполните замену  $y = \sqrt{3x+2}$ .  
 2.  $-25; 3$ .      3.  $\frac{180^\circ}{\pi} \arccos \frac{1}{\pi}$ .  
 4.  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_3(2+\sqrt{3})\right)$ . *Указание.* Условие означает, что  $x \geq 2$ .

Функция  $g_1(x) = \sqrt{1+3x-x^2}$  определена на отрезке

$$\left[\frac{3-\sqrt{13}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right], \text{ причем на отрезке } J = \left[2; \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right] \text{ она убывает. Следовательно, область ее значений – отрезок } [0; \sqrt{3}].$$

Функция  $g_2(x) = 2 - g_1(x)$  возрастает, и ее область значений – отрезок  $[2-\sqrt{3}; 2]$ , а функция  $g_3(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} g_2(x)$  определена и убывает на отрезке  $J$ .

Ее область значений – отрезок  $\left[\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 2; \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(2-\sqrt{3})\right]$ . Последний отрезок целиком содержится в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  –

докажите это! Следовательно, наибольшее значение  $\operatorname{tg} g_3(x)$  равно

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(2 - \sqrt{3}) = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \log_3(2 + \sqrt{3}) \right).$$

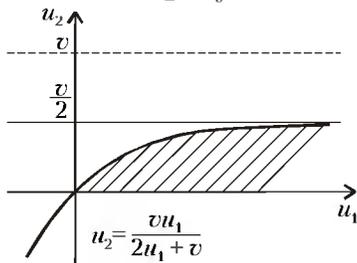


Рис. 16

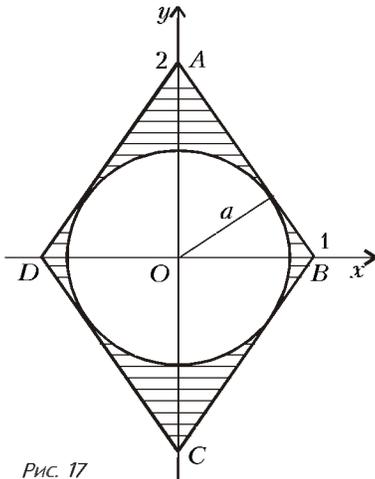


Рис. 17

5. См. рис.16.

6. а)  $2/\sqrt{5}$ ; б)  $4(5 - \pi)/5$ .

*Указание.* Первое уравнение задает на плоскости  $xOy$  ромб, а второе – окружность с радиусом  $a$  и центром в начале координат (рис.17). Условию а) отвечает значение параметра  $a$ , при котором окружность является вписанной в ромб.

б) На рисунке заштрихованы точки, удовлетворяющие данному неравенству.

**Вариант 12**

1. 10 л и 20 л.
2. 11.
3.  $(0; 1) \cup \{2\} \cup (4; +\infty)$ .
4.  $\left( \pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n \right)$ ,  
 $\left( \frac{\pi}{4} + \pi n; -\pi n \right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .
5.  $-3/4$ ; 0;  $2/9$ .

6.  $7 + 1 = 8$   
 $- \quad \times \quad :$   
 $1 + 3 = 4$   
 $\parallel \quad \parallel \quad \parallel$   
 $6 : 3 = 2$

**Вариант 13**

1.  $\{0\}$ .
2. 4.
3.  $[-8; -6) \cup (3; \sqrt{10})$ .
4.  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ .
5.  $\frac{\pi}{12} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{5\pi}{12} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ . *Указание.* Из условия следует, что

$$\cos\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Осталось найти решения этого уравнения и выбрать те из них, при которых возрастают соответствующие показатели степени.

6.  $16 - \frac{13}{9}\pi$ . *Указание.* Докажите, что шар касается сторон основания пирамиды.
7.  $[3\sqrt{2}; 6]$ . Обозначив через  $g(x) = \cos(2f(x))$ , приходим к уравнению

$$\frac{1}{g(x)} - 6g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5}{x}.$$

После замены  $x$  на  $\frac{1}{x}$  имеем

$$\frac{1}{g\left(\frac{1}{x}\right)} - 6g(x) = 5x.$$

Исключая из этих уравнений  $g\left(\frac{1}{x}\right)$ , получаем уравнение относительно  $g(x)$ :

$$6g^2(x) + 5xg(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = -x, \\ g(x) = \frac{x}{6}. \end{cases}$$

Равенство  $g(x) = -x$  невозможно. Поэтому

$$\cos(2f(x)) = \frac{x}{6},$$

следовательно,  $f(x) = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x}{6}\right)$ .

**Вариант 14**

1.  $0, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0, k \in \mathbf{Z}, k \geq 0$ .
2.  $\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8n}{5}}\right)/2$ , где  $n = 6, 7, \dots, 250$ .

*Указание.* Пусть  $q$  – знаменатель прогрессии, а  $4n$  – упомянутое в условии целое число. Тогда

$$10(q + q^2) = 4n \leq 1000, q > 1.$$

Отсюда

$$q = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{-1 + \frac{8n}{5}} \right), \text{ где } n \leq 250.$$

Из условия  $q > 1$  следует, что  $10(q^2 + q) < 4n$  при  $q = 1$ , т.е.  $n > 5$ .

3.  $14\frac{1}{2}$  ч. *Указание.* Пусть единица площади – это площадь одного поля, а тракторы вспахивают поле за  $x, y$  и  $z$  часов соответственно. Из условия получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{y}, \\ x + 2 = z, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{36}. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим  $x = 16, y = 48, z = 18$ . Если переездов с одного поля на другое нет, то на одном поле работает один трактор, на другом – два, причем работа закончится не раньше, чем через 16 часов.

Если же предположить, что есть переезды с одного поля на другое, то «ущерб» от них был бы минимален при следующих условиях:

- 1) переезд всего один, и выполняет его наименее производительный трактор, т.е. второй;
- 2) все три трактора заканчивают работу одновременно (что означает отсутствие их простоев).

Эти условия выполняются, если второй трактор начинает работу с первым в течение  $t$  ч на одном поле, а затем переезжает на другое поле, где заканчивает работу с третьим за  $s$  ч. Составив систему уравнений и решив ее, получим, что общее время при таком порядке работы равно 14,5 ч, что меньше 16 ч.

4.  $(3; 1 + \sqrt{5}) \cup \left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$ . *Указание.* Неравенство равносильно

такому:

$$\log_{x^2-2x-3} \frac{(x^2-2x-3)(x+4)}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3} |x^2-2x-2|.$$

5.  $\sqrt{769}/8$ . *Указание.* Пусть  $SA = x$ . Выразите через  $x$  объем  $V$  пирамиды, пользуясь формулами  $V = \frac{1}{3}xS_{ABC}$  и  $V = \frac{1}{3}rS$ , где  $S$  – площадь поверхности пирамиды, и получите уравнение, решив которое, найдите  $x$ .

Радиус описанной сферы равен гипотенузе прямоугольного треугольника  $OAO'$ , где  $O$  – центр сферы,  $O'$  – центр окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ .

**Вариант 15**

1.  $4; (1 + \sqrt{7})/2$ .
2. 4%.
3.  $(-2; -3/2) \cup (1; +\infty)$ .
4.  $\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ .
5.  $300/17$ . *Указание.* Докажите, что вписанная окружность касается стороны  $BC$  в ее середине.
6.  $a = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4t - 4}}{2}$ , где  $t = 16 / \left(2 + n + \frac{1}{n}\right)$  при  $n = -5, -4, -3, -2, 1, 2, \dots, 17$ .

**Вариант 16**

1.  $(-\infty; 2) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$ .
2. 1.
3.  $\frac{\pi}{4} \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$ .
4.  $(-3; 3) \cup (3; 4)$ .
5.  $[-4; 2]$ . *Указание.* Условие равносильно тому, что неравенство  $|x^2 - 2x + a| \leq 5$  выполняется при всех  $x \in [-1; 2]$ , а это равносильно справедливости неравенства

$$(t + a - 6)(t + a + 4) \leq 0,$$

где  $t = (x - 1)^2$ , при всех  $0 \leq t \leq 4$ .

6. 30.
7. 2.

**ФИЗИКА**

*Физический факультет*

1. Считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью  $v_0$ , равной скорости движения оси катушки, и вращения с угловой скоростью  $\omega$  вокруг этой оси. Поскольку качение катушки происходит без проскальзывания,  $\omega = v_0/R$ . В тот момент, когда скорость оси катушки равна  $v_0$ , скорость точки  $B$  должна быть равна  $v_B = v_0 - \omega r = (R - r)v_0/R$ , а потому при движении катушки с течением времени длина отрезка нерастяжимой нити  $AB$  должна уменьшаться. При этом искомым промежутком времени  $\tau$  должен удовлетворять уравнению

$$L(\tau) = \frac{L_0}{n} = L_0 - \frac{(a_0 - a)\tau^2}{2},$$

где  $a_0 = aR/(R - r)$  – ускорение центра катушки. Отсюда находим

$$\tau = \sqrt{\frac{2L_0(n-1)(R-r)}{anr}}.$$

2. Поскольку нить прикреплена к середине одного из верхних горизонтальных ребер и ее тянут перпендикулярно этому ребру, из соображений симметрии можно утверждать, что куб должен начать поворачиваться вокруг одного из нижних ребер, параллельных тому ребру, к середине которого прикреп-

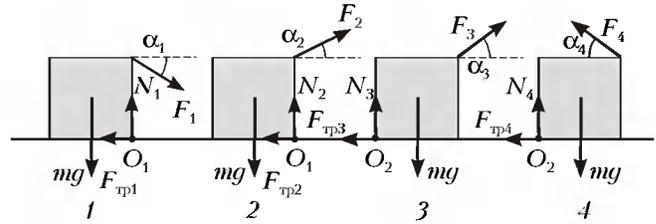


Рис. 18

лена нить. На рисунке 18 показаны сечения куба вертикальной плоскостью, в которой располагается нить; здесь же показаны силы, действующие на куб, когда за нить тянут вверх или вниз под углом  $\alpha_i$  к горизонту с силой  $F_i$  такой, что при ее незначительном увеличении куб начал бы поворачиваться. В первом случае угол наклона нити к горизонту  $\alpha_1$  будем считать отрицательным, а во всех остальных – положительным. Поскольку куб является однородным, действующая на него сила тяжести  $m\vec{g}$  приложена к центру куба. Результирующая сил реакции крышки, как это обычно и делают, изображена в виде двух составляющих: нормальной  $\vec{N}_i$  и тангенциальной  $\vec{F}_{\text{тр}i}$ . Точки приложения этих составляющих в первом и втором случаях обозначены на рисунке буквой  $O_1$ , а в третьем и четвертом –  $O_2$ .

Поскольку куб не должен скользить по крышке, согласно второму закону Ньютона должны выполняться равенства

$$N_i - mg + F_i \sin \alpha_i = 0,$$

$$F_{\text{тр}i} - F_i \cos \alpha_i = 0,$$

где  $i = 1, 2, 3, 4$ . При этом

$$F_{\text{тр}i} \leq \mu N_i.$$

Для того чтобы куб поворачивался относительно осей, проходящих через точки  $O_1$  или  $O_2$ , алгебраическая сумма моментов сил в рассматриваемых случаях должна быть равна нулю:

$$0,5amg - aF_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

$$0,5amg - aF_2 \cos \alpha_2 = 0,$$

$$0,5amg - aF_3 \sin \alpha_3 + aF_3 \cos \alpha_3 = 0,$$

$$0,5amg - aF_4 \sin \alpha_4 - aF_4 \cos \alpha_4 = 0,$$

где  $a$  – ребро куба.

Из написанных уравнений следует, что величина силы натяжения нити в первом и втором случаях должна быть равна  $F_i = mg/(2 \cos \alpha_i)$ , причем  $\text{tg} \alpha_i \leq 1/\mu - 2$ . Поскольку по условию задачи  $\mu < 0,5$ , то  $\text{tg} \alpha_i < 0$ . Значит, второй случай при заданных условиях не реализуется, а в первом случае

$$F_{1\text{min}} = 0,5 \sqrt{5 - \frac{4}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}} mg.$$

В третьем случае

$$F_3 = \frac{mg}{2(\sin \alpha_3 - \cos \alpha_3)},$$

причем

$$F_{3\text{min}} = \frac{mg}{2} < F_{1\text{min}},$$

и нить следует тянуть вертикально вверх.

Наконец, в четвертом случае

$$F_4 = \frac{mg}{2(\sin \alpha_4 + \cos \alpha_4)} = \frac{mg}{2\sqrt{2} \sin(\alpha_4 + \pi/4)}.$$

Поскольку максимального значения синус угла достигает тогда, когда угол становится равным  $\pi/2$ , то при  $\alpha_4 = \pi/4$  иско-

мая сила натяжения нити равна

$$F_4 \left( \alpha_4 = \frac{\pi}{4} \right) = \frac{mg}{2\sqrt{2}}.$$

Конечно, это утверждение будет верно, если  $1/3 \leq \mu$ . Если же  $0 \leq \mu \leq 1/3$ , то нить следует тянуть под углом  $\alpha_4 =$

$= \arccos \left( \mu / \sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2} \right)$ . При этом искомая сила натяжения нити должна быть равна

$$F_4 (0 \leq \mu \leq 1/3) = mg \frac{\sqrt{(1-2\mu)^2 + \mu^2}}{2(1-\mu)}.$$

**3.** Давление воды в любой нижней точке кольца должно быть равно  $\rho_a + \rho_v g(H-h)$ , где  $\rho_a$  – атмосферное давление, а  $H$  – высота кольца. С другой стороны, это давление должно быть равно давлению, обусловленному действием сил тяжести кольца и давления воздуха на кольцо, т.е. должно выполняться соотношение  $\rho_a + \rho_v g(H-h) = \rho_a + \rho_d gH$ . Следовательно,

$$\rho_v (H-h) = \rho_d H.$$

При заливании масла в отверстие в кольце, поскольку плотность масла меньше плотности дерева, нижний уровень масла не может опуститься ниже горизонтальной плоскости, совпадающей с нижними точками кольца. Поэтому из отверстия в кольце масло вытеснит лишь часть воды, а толщина  $h_1$  слоя воды, оставшейся внутри кольца, должна удовлетворять уравнению

$$\rho_v (H-h) = \rho_v h_1 + \rho_n (H-h_1).$$

При этом глубина погружения кольца в воду изменяться не может. Из сказанного ясно, что одновременно с увеличением объема залитого в кольцо масла уровень воды в сосуде и кольцо будут одновременно подниматься. Поэтому для искомой высоты подъема воды можно записать уравнение

$$xR^2 = (H-h-h_1)r^2.$$

Решая совместно все полученные уравнения, определим искомую высоту подъема воды:

$$x = \frac{hr^2 \rho_n}{(\rho_v - \rho_n)R^2}.$$

**4.** В исходном состоянии ртуть полностью заполняла левую часть сосуда, но не оказывала давления на его верхнюю грань. Значит, давление воздуха было равно

$$p_1 = \frac{\rho gh}{2},$$

где  $\rho$  – плотность ртути, а  $h$  – высота поршня. Если высоту столба ртути при конечной температуре обозначить  $h_2$ , то давление воздуха в правой части сосуда должно удовлетворять соотношению

$$p_2 h = \frac{\rho gh_2^2}{2}.$$

Таким образом, для интересующего нас перемещения поршня  $x$  можно записать равенство

$$hL = h_2(L+x),$$

т.к. площадь поперечного сечения сосуда неизменна. Для воздуха на основании объединенного газового закона получим

$$p_1 V_1 = n p_2 V_2, \text{ или } p_1 L = n p_2 (L-x).$$

Для упрощения дальнейших вычислений обозначим  $x/L = z$ . Тогда из составленных ранее уравнений следует

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h^2}{h_2^2} = (1+z)^2 = (1-z)n.$$

Последнее соотношение эквивалентно уравнению

$$z^2 + (2+n)z + 1 - n = 0,$$

решая которое, найдем

$$x = 0,5 \left( \sqrt{n(n+8)} - 2 - n \right) L \approx 0,14L.$$

**5.** Как известно, коэффициент полезного действия цикла равен отношению работы, совершенной газом за цикл, к количеству теплоты, полученному газом от нагревателя за то же время. На участке  $1-2$  объем газа увеличивается при одновременном увеличении его давления, работа газа на этом участке равна

$$A_{12} = \frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2}.$$

На участке  $2-3$  газ работы не совершает, а на участке  $3-1$  работа отрицательна и равна

$$A_{31} = (V_1 - V_2)p_1.$$

Таким образом, работа газа за цикл равна

$$A = A_{12} + A_{31} = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)}{2}.$$

Определим теперь количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя. На участке  $1-2$  газ совершает работу, при этом его давление и объем, а с ними температура и внутренняя энергия газа должны возрастать. Поэтому на этом участке газ должен получать тепло. На основании первого закона термодинамики,

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12} = A_{12} + 1,5R(T_2 - T_1).$$

На втором участке температура газа уменьшается, и газ не совершает работы; следовательно, на этом участке газ должен отдавать тепло холодильнику. Можно доказать, что и на третьем участке газ отдает тепло холодильнику. Таким образом, за цикл газ получает от нагревателя количество теплоты  $Q_{12}$ . Легко видеть, что в точке  $1$  температура газа минимальна, а в точке  $2$  – максимальна, поэтому  $T_2/T_1 = n$ . В то же время, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, температура газа в точке  $3$  равна  $T_3 = p_1 V_2 / R$ . Поскольку на участке  $2-3$  газ охлаждается изохорически, а на участке  $3-1$  изобарически,  $T_3 = T_1 V_2 / V_1 = p_1 T_2 / p_2$ . Отсюда, с учетом того, что  $p_1 / V_1 = p_2 / V_2$  (точки  $1$  и  $2$  лежат на прямой, проходящей через начало координат  $pV$ -диаграммы), получим

$$T_3 = \sqrt{T_1 T_2} = \sqrt{n} T_1.$$

Тогда

$$A = 0,5RT_1(\sqrt{n} - 1)^2, \quad Q_{12} = 2RT_1(n-1),$$

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{\sqrt{n} - 1}{4(\sqrt{n} + 1)}.$$

Максимально достижимый КПД, получающийся при использовании цикла Карно, равен

$$\eta_K = 1 - \frac{T_x}{T_n},$$

где  $T_n$  – температура нагревателя ( $T_1$ ), а  $T_x$  – холодильника ( $T_2$ ). Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{\eta_K}{\eta} = \frac{4(\sqrt{n} + 1)^2}{n} = 9.$$

**6.** По условию задачи морозильник работает по циклу Карно. В школьном курсе обычно не анализируется работа холодильных тепловых машин, а рассматриваются лишь тепловые двигатели. Однако, поскольку цикл Карно является обратимым, соотношения между совершаемой работой веществом работой, потребляемым от нагревателя и передаваемым холодильнику теплом не должны изменяться при изменении направления прохождения цикла. Отсюда легко найти искомую мини-

маленькую мощность мотора:

$$N = \frac{Q(T_2 - T_1)}{\tau T_1 \eta_m} \approx 11 \text{ Вт.}$$

7. После перевода ключа  $K$  в положение 1 конденсатор емкостью  $C_1$  начинает заряжаться через диод  $D_1$  и резистор  $R$ . К моменту перевода ключа в положение 2 заряд этого конденсатора станет равным  $q_{11} = C_1 E$ . При этом конденсатор емкостью  $C_2$  должен оставаться незаряженным, т.е.  $q_{21} = 0$ . После переключения ключа в положение 2 диод  $D_1$  переходит в непроводящее состояние, а включенный последовательно с конденсаторами диод  $D_2$  можно заменить проводником с нулевым сопротивлением. Если установившиеся напряжения на первом и втором конденсаторах после перевода ключа в положение 2 обозначить  $U_1$  и  $U_2$ , а заряды этих конденсаторов  $q_{12}$  и  $q_{22}$ , то можно записать  $q_{12} = C_1 U_1$ ,  $q_{22} = C_2 U_2$ . По прошествии достаточно большого промежутка времени напряжение на резисторе  $R$  должно стать равным нулю (конденсаторы полностью зарядились, и, следовательно, ток в цепи прекратился), поэтому сумма напряжений на конденсаторах будет равна ЭДС батареи  $E$ . В то же время на основании закона сохранения заряда можно записать равенство  $q_{12} - q_{22} = -q_{11}$ . С учетом двух предыдущих соотношений последнее выражение эквивалентно уравнению

$$(E - U_2)C_1 - U_2 C_2 = -EC_1,$$

решая которое, определим искомый заряд конденсатора емкостью  $C_2$ :

$$q_{22} = \frac{2C_1 C_2 E}{C_1 + C_2}.$$

8. Пронизывающий рамку магнитный поток в момент времени  $t$  равен

$$\Phi(t) = BNS \cos \alpha(t),$$

где  $\alpha(t) = \omega t$  – угол между вектором индукции  $\vec{B}$  внешнего поля и нормалью к плоскости рамки. Изменение этого потока приводит к возникновению ЭДС индукции:

$$E(t) = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = BNS\omega \sin \omega t.$$

Поскольку проводники рамки замкнуты накоротко, а ее общее сопротивление равно  $R$ , согласно закону Ома в рамке возникает ток

$$I(t) = \frac{E(t)}{R}.$$

При этом выделяется мгновенная тепловая мощность

$$P(t) = RI^2(t).$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что для поддержания неизменной скорости вращения рамки потери энергии, обусловленные выделением тепла, должны компенсироваться работой внешних сил

$$\Delta A(t) = M(t)\omega \Delta t.$$

Отсюда следует, что

$$M(t)\omega = P(t) = \frac{(BNS\omega \sin \omega t)^2}{R}.$$

Учитывая, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно 0,5, а среднее значение момента сил, действующих на рамку, по условию равно  $M_{cp}$ , получаем

$$B = \frac{\sqrt{2RM_{cp}}}{NS\sqrt{\omega}}.$$

9. По условию задачи пучок света, падающий нормально на диаметрально плоскость разреза диска, должен выйти пер-

пендикулярно указанной плоскости. Поэтому можно утверждать, что ход луча света в диске должен быть симметричным относительно радиуса, перпендикулярного плоскости разреза. На рисунке 19 показан ход двух лучей, удовлетворяющих этому условию, причем первый луч испытывает два, а второй – три отражения. Поскольку нормалью к боковой поверхности диска в заданной точке является радиус, проведенный в эту точку, на основании закона отражения можно утверждать, что свет внутри диска распространяется вдоль сторон правильного многоугольника. Как известно, сумма углов правильного  $2k$ -угольника равна  $\beta_k = 2\pi(k - 1)$ . Поэтому угол  $\alpha_k$  падения луча, испытывающего при распространении в половине диска  $k$  отражений и выходящего параллельно падающему лучу, равен

$$\alpha_k = \frac{\beta_k}{4k} = 0,5\pi \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

По условию задачи интенсивность выходящего пучка света лишь незначительно отличается от интенсивности падающего пучка. Это возможно только в том случае, если при отражении света на границе лед – воздух имеет место явление полного внутреннего отражения. Как известно, это явление возникает, когда синус угла падения становится равным обратной величине относительного показателя преломления, т.е. угол падения  $\alpha$  удовлетворяет условию  $\alpha \geq \arcsin(1/n) \approx 50,3^\circ$ . Отсюда следует, что условия задачи будут выполнены, если при своем распространении в половине диска свет будет испытывать не менее трех отражений. Обратившись к рисунку 19, определим возможные значения искомого расстояния:

$$L_k = 2R \sin \left(0,5\pi \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right), \text{ где } k = 3, 4, \dots$$

10. Поскольку точечный источник помещен в главный фокус линзы, выходящий из линзы пучок света параллелен ее главной оптической оси. Учитывая, что эта ось перпендикулярна передней грани призмы, а диаметр линзы больше размеров этой грани, следует считать, что вся призма полностью залита светом, и падающий на призму пучок проходит через ее переднюю грань, не изменяя своего направления распространения. При выходе из призмы пучок света за счет преломления расщепляется на два пучка параллельных лучей. Согласно закону преломления, с учетом принятых на рисунке 20 обозначений, можно утверждать, что оси выходящих пучков образуют с осью падающего на призму пучка углы  $\beta_1$  и  $\beta_2$  такие, что  $\beta_1 = \gamma_1 - \alpha$  и  $\beta_2 = \gamma_2 - \alpha$ , причем  $\sin \gamma_1 = n_1 \sin \alpha$  и  $\sin \gamma_2 = n_2 \sin \alpha$ . По условию задачи  $\alpha \ll 1$ , поэтому

$$\beta_1 \approx (n_1 - 1)\alpha \text{ и}$$

$$\beta_2 \approx (n_2 - 1)\alpha. \text{ Поскольку}$$

$$n_1 > n_2, \text{ получаем } \beta_1 > \beta_2.$$

Интерференционная картина наблюдается только в области перекрытия выходящих из призмы пучков, т.е. внутри параллелограмма  $OBEK$ , а плоскость экрана перпендикулярна главной оптической оси линзы, поэтому максимальный размер интерференционной картины

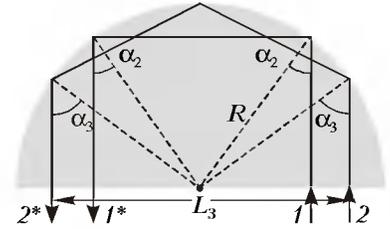


Рис. 19

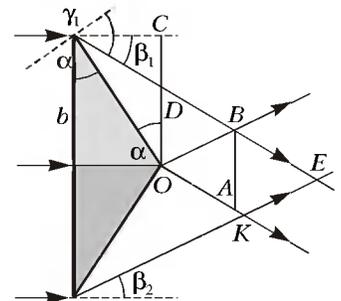


Рис. 20

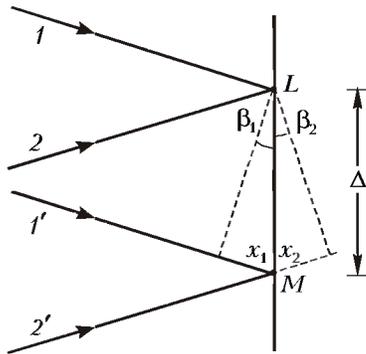


Рис. 21

будет равен длине отрезка  $AB$ , равного

$$AB = OD = OC - DC = b - b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta_1 \approx (1 - (n_1 - 1) \alpha^2) b.$$

Для вычисления ширины  $\Delta$  интерференционной полосы обратимся к рисунку 21, на котором изображено сечение плоскостью чертежа той части экрана, которая находится в области перекрытия световых пучков. Пусть разность хода пересекающихся в точке  $L$  световых лучей  $1$  и  $2$  равна нулю. Тогда в этой точке будет наблюдаться интерференционный максимум нулевого порядка, а в точке  $M$  — максимум первого порядка, если разность хода  $x_1 + x_2$  попадающих в эту точку лучей  $1'$  и  $2'$  равна  $\lambda$ . Поскольку  $x_1 = \Delta \cdot \sin \beta_1 \approx \Delta \cdot \beta_1$  и  $x_2 = \Delta \cdot \sin \beta_2 \approx \Delta \cdot \beta_2$ , то искомую ширину можно найти из соотношения

$$\lambda \approx (n_1 + n_2 - 2) \alpha \Delta.$$

Видно, что ширина наблюдаемой интерференционной полосы не зависит от расстояния, на котором находится экран от призмы, поэтому искомое максимальное число интерференционных полос должно быть равно целой части отношения

$$\frac{AB}{\Delta} \approx \frac{(n_1 + n_2 - 2)(1 - (n_1 - 1) \alpha^2) b \alpha}{\lambda}.$$

*Факультет вычислительной математики и кибернетики*

- $v_0 = va_1 / (a_1 - a_2) = 100 \text{ км/с.}$
- $a = g \sqrt{9\mu^2 + 4} = 20,5 \text{ м/с}^2.$      3.  $\alpha = 1/\sqrt{3} \approx 0,58.$
- $\Delta h = \frac{2Mah}{p_0 S + M(g - a)} = 4 \text{ см.}$
- $Q = 5l(p_0 S + Mg \sin \alpha) / 2 \approx 73,3 \text{ Дж.}$
- $q = \frac{q_1 r_2 - q_2 r_1}{r_1 + r_2} \approx 1,67 \cdot 10^{-9} \text{ Кл.}$
- $L = \frac{l}{1 - \frac{2\pi \epsilon_0 l m_1 m_2 v_0^2}{(m_1 + m_2) q_1 |q_2|}} \approx 3,85 \text{ м.}$
- $I_{\max} = U \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}} = 0,75 \text{ А.}$      9.  $\Delta n = \frac{\varphi}{\alpha} = 0,6.$
- $d = \frac{F(2b - a)}{2b - a - 2F} = 30 \text{ см.}$

*Химический факультет*

- $F_2 = mg + F_1 / 2 \geq 15 \text{ Н.}$
- $\Delta p = Mv \operatorname{tg} \alpha = 400 \text{ кг} \cdot \text{м/с.}$

- $h = H/\sqrt{2} \approx 5,66 \text{ м.}$
- $\varphi = (\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2) / (V_1 + V_2) \approx 27\%.$
- $\Delta T = 2A / (3R(1 - \eta)) = 2,5 \text{ К.}$
- $E = \sqrt{v^2 - v_0^2} / (\tau e / m) \approx 8,9 \cdot 10^4 \text{ В/м.}$
- $r = (k - 1)R = 4 \text{ Ом.}$
- $U = m(\Delta\varphi / \Delta t)^2 R^2 / (2e) = 2,9 \cdot 10^4 \text{ В, где } \Delta\varphi = \pi/4 \text{ рад.}$
- $d = (\Gamma - 1) / (\Gamma D) = 6 \text{ см.}$
- $I = W\lambda e / (hc\Delta t) \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ А, где } c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования  
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!  
http://vivovoco.nns.ru  
(раздел «Из номера»)

# КВАНТ

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, А.И.Пацхверия, Л.Н.Тишков,  
П.И.Чернуский

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

## ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.  
Рег. св-во №0110473

Адресредакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,  
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г. Чехов Московской области  
Заказ №